

**Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа**

ФИЗИКА

Постоянный электрический ток

Задание № 5 для 10-х классов

(2022 – 2023 учебный год)



Долгопрудный, 2023

Составитель: Чудновский А. В., преподаватель ЗФТШ МФТИ

Физика. Постоянный электрический ток. Задание № 5 для 10-х классов (2022 – 2023 учебный год), 2023, 30 с.

Составитель:

Чудновский Александр Витальевич

Подписано в печать 13.02.23. Формат 60×90 1/16

Бумага типографская. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,87. Уч.-изд. л. 1,66.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)

Институтский пер., д. 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700,
ЗФТШ тел. (495) 408-5145 – заочное отделение
тел. (498) 744-63-51 – очно-заочное отделение
тел. (499) 744-65-83 – очное отделение

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

zftsh.online@gmail.com

Наш сайт: <https://zftsh.online/>

© МФТИ, ЗФТШ, 2023

Все права защищены. Воспроизведение учебно-методических материалов и материалов сайта ЗФТШ в любом виде, полностью или частично, допускается только с письменного разрешения правообладателей.

§1. Электрический ток и сила тока

В рамках электростатики были изучены взаимодействия *неподвижных* зарядов. Теперь мы переходим к рассмотрению движущихся зарядов.

Электрический ток – это упорядоченное движение электрических зарядов. **Носители заряда** – это заряженные частицы, которые перемещаются и тем самым переносят заряд. В металлах носителями заряда являются электроны, в растворах – электроны и ионы, в полупроводниках – электроны и дырки, в вакууме – любые заряженные частицы.

Сила тока I – это величина, равная отношению суммарного заряда Δq , протёкшего за некоторое время Δt через поперечное сечение проводника, к этому промежутку времени Δt :

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (1.1)$$

Напомним, что в международной системе единиц СИ заряд измеряется в кулонах (Кл), время – в секундах (с), а сила тока – в амперах (А).

Если в создании тока принимают участие частицы обоих знаков и они пересекают поперечное сечение AB проводника в обоих направлениях (рис. 1.1), то величина Δq может быть представлена в виде:

$$\Delta q = \Delta q_{\text{вправо}} - \Delta q_{\text{влево}}, \quad (1.2)$$

где

$$\Delta q_{\text{вправо}} = \left| \Delta q_{\text{вправо}}^+ \right| - \left| \Delta q_{\text{вправо}}^- \right|, \quad (1.3)$$

$$\Delta q_{\text{влево}} = \left| \Delta q_{\text{влево}}^+ \right| - \left| \Delta q_{\text{влево}}^- \right|. \quad (1.4)$$

Индексы «+» и «-» отмечают знак зарядов, индекс «вправо» обозначает заряды, протёкшие через поперечное сечение проводника в том направлении, которое выбрано в качестве положительного для силы тока, а индекс «влево» – в обратном направлении.

Обратите внимание, что выбор положительного направления для силы тока является произвольным, так как, выбирая какое-то направление, мы никоим образом *не утверждаем*, что ток будет течь именно в этом направлении, мы лишь *договариваемся считать* силу тока, текущего в этом направлении, положительной, а силу тока, текущего в обратном направлении, – отрицательной. Фактическим же направлением тока называется направление движения положительных зарядов (точнее, то направление, при выборе которого в качестве положительного сила тока, найденная из (1.1) с учётом (1.2), (1.3) и (1.4), оказывается положительной).

Ток в металлах (наиболее распространённых на практике проводниках) создаётся только электронами, заряд которых $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Положительно

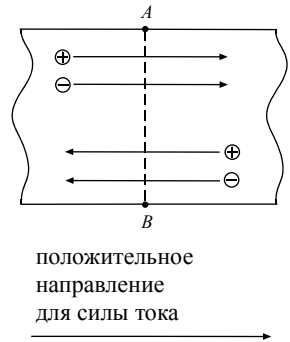


Рис. 1.1

заряженные частицы (ядра атомов) при этом не движутся. Поэтому получается, что направление тока противоположно направлению движения электронов в цепи. Некоторая нелогичность ситуации объясняется исторически: понятие знака заряда (а значит, и направления тока) было введено задолго до экспериментального определения типа носителей заряда в металлах. Когда же выяснилось, что их знак изначально не угадали, то менять определение направления тока в силу сложившейся традиции уже не стали, тем более, что такой выбор – всего лишь вопрос обозначений, а не физической сути явлений.

Постоянный ток – это такой ток, сила которого *не* зависит от времени. В 11-м классе вы также будете изучать **переменный ток** – ток, сила которого зависит от времени.

§2. Электрическое сопротивление среды и закон Ома

При движении в веществе носители заряда взаимодействуют («сталкиваются») с частицами среды и из-за этого теряют скорость. Такое сопротивление среды можно описать в виде некоторой усреднённой силы $F_{\text{сопр}}$, действующей со стороны среды на движущийся в ней носитель заряда. Эта сила направлена противоположно средней скорости \vec{v} носителя заряда и возрастает с увеличением v (аналогично силе сопротивления воздуха при полёте тела).

Для многих сред справедлива линейная зависимость $\vec{F}_{\text{сопр}}$ от \vec{v} , что в случае движения вдоль одной оси можно записать в скалярной форме:

$$F_{\text{сопр}} = -\alpha v, \quad (2.1)$$

где α – некоторая константа, определяемая свойствами вещества. Для проводников, изготовленных именно из таких материалов, справедлив закон Ома.

Рассмотрим цилиндрический проводник длиной l и площадью поперечного сечения S , изготовленный из вещества, для которого справедливо (2.1), и помещённый во внешнее постоянное однородное электрическое поле напряжённостью E (единица измерения – В/м), направленной вдоль оси проводника (рис. 2.1).

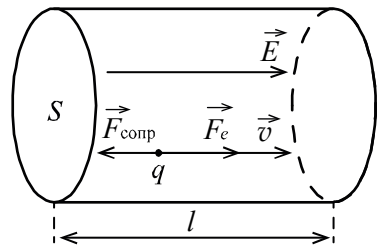


Рис. 2.1

Пусть q и v – абсолютные значения заряда и скорости носителей заряда, n – их концентрация (единица измерения – $1/\text{м}^3$), тогда за время Δt через поперечное сечение проводника пройдут все носители заряда, расположенные в объёме $\Delta V = S \cdot v \Delta t$ и несущие суммарный заряд $\Delta q = q \cdot n \Delta V$. По определению (1.1) сила тока

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{qnSv\Delta t}{\Delta t} = qnSv. \quad (2.2)$$

В конечном итоге мы хотим найти силу постоянного тока в проводнике, что в соответствии с (2.2) равносильно условию $v = \text{const}$. Для его выполне-

ния необходимо компенсировать силу сопротивления среды (2.1) силой $F_e = qE$, действующей со стороны внешнего электрического поля: $F_{\text{сопр}} + F_e = 0$. После подстановки выражений для $F_{\text{сопр}}$ и F_e находим $v = (q/\alpha)E$. Таким образом, установившаяся скорость носителей заряда прямо пропорциональна напряжённости внешнего поля:

$$v = \mu E, \quad (2.3)$$

а коэффициент $\mu = q/\alpha$ называется **подвижностью** носителей заряда.

По известной из электростатики формуле для разности потенциалов в однородном электрическом поле напряжение между торцами проводника $U = El$, откуда можно выразить

$$E = \frac{U}{l}. \quad (2.4)$$

Подставив (2.3) и (2.4) в (2.2), получим

$$I = qnS\mu \frac{U}{l}. \quad (2.5)$$

Полученная линейная зависимость I от U позволяет сформулировать закон Ома: *сила тока через проводник, для материала которого выполняется условие (2.1), прямо пропорциональна напряжению на концах проводника*. Закон Ома справедлив для очень широкого класса веществ, в частности, для всех металлов и сплавов (если их температура поддерживается постоянной).

Конечно, рассуждения, основанные на предположении (2.1), не соответствуют исторической последовательности открытия данного закона. Немецкий физик Георг Симон Ом (1787 – 1854) сформулировал свой закон в 1826 году, тогда как электрон (носитель заряда в большинстве веществ) был открыт лишь в 1897 году. Г.С. Ом чисто экспериментально обнаружил, что отношение U/I остаётся постоянным в широком диапазоне прикладываемых напряжений, хотя зависит, например, от геометрических размеров и температуры образца.

Линейную зависимость (2.5) можно записать в виде $I = GU$, где коэффициент пропорциональности $G = qn\mu S/l$ называется **проводимостью**. На практике, однако, вместо проводимости чаще используют обратную к ней величину $R = 1/G$, называемую **сопротивлением**, и записывают (2.5) в виде

$$I = \frac{U}{R}, \quad (2.6)$$

где сопротивление

$$R = \frac{1}{qn\mu} \cdot \frac{l}{S}. \quad (2.7)$$

Выражение (2.6) с учётом $R = \text{const}$ является одной из форм записи закона Ома. Закон Ома может также иметь вид $U = RI$ или $R = U/I$. Из последней формулы видно, что размерность R – это В/А. Для этого отношения суще-

ствуется собственное обозначение – Ом, то есть сопротивление измеряется в омах, а $R = V/I$.

Из (2.7) видно, что R не зависит от I или U , а определяется размерами проводника (l, S) и свойствами его материала (q, n, μ). Последние можно объединить в одну константу, записав (2.7) как

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}, \quad (2.8)$$

где $\rho = 1/(qn\mu)$ – *удельное сопротивление* вещества проводника. Именно ρ (а не q, n и μ по отдельности) проще всего найти в справочниках, так как оно легко измеряется экспериментально и широко используется при расчётах в электротехнике.

Из (2.8) можно получить $\rho = RS/l$, откуда видно, что величина ρ измеряется в Ом·м. В технике для ρ используется также размерность Ом·мм²/м, которая отражает тот факт, что проводники обычно длинные (м), но тонкие (мм). В табл. 2.1. приведены для ознакомления значения ρ четырёх чистых металлов (обладающих наименьшими ρ) и одного сплава, часто используемого в случаях, когда нужен проводник с достаточно большим удельным сопротивлением. Электропроводку в доме «редко» делают из серебра или золота, поэтому самые распространённые на практике провода – медные и алюминиевые. Золото же используется для изготовления качественных контактов, но не из-за малого удельного сопротивления, а по той причине, что золото не окисляется (не ржавеет) и срок службы контактов заметно возрастает.

Таблица 2.1

Удельное сопротивление некоторых веществ

№	Вещество	Химический состав	ρ , Ом·мм ² /м	ρ , Ом·м
1	серебро	Ag	0,015	$1,5 \cdot 10^{-8}$
2	медь	Cu	0,016	$1,6 \cdot 10^{-8}$
3	золото	Au	0,021	$2,1 \cdot 10^{-8}$
4	алюминий	Al	0,025	$2,5 \cdot 10^{-8}$
5	нихром	70%Ni, 20%Cr, 8%Fe, 2%Mn	1,1	$1,1 \cdot 10^{-6}$

Пример 1. Найдите подвижность μ электронов в золоте. Концентрация электронов, принимающих участие в создании тока, $n \approx 6 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

Решение. Из выражения для ρ , приведённого сразу после (2.8), выразим подвижность $\mu = 1/(qn\rho)$. Подставив табличные значения модуля заряда q электрона и удельного сопротивления ρ золота, получим $\mu \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$.

Пример 2. Из алюминия изготовили проволоку диаметром $d = 1$ мм и длиной $l = 10$ м. Определите сопротивление R проволоки.

Решение. Площадь поперечного сечения проволоки $S = \pi d^2/4$, значение удельного сопротивления ρ алюминия находим по табл. 2.1 или в справочнике. Воспользовавшись (2.8), получим

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} = \frac{4\rho l}{\pi d^2} = 0,32 \text{ Ом.}$$

Пример 3. Электрическую газонокосилку для футбольного поля подключили к розетке напряжением $U = 220$ В с помощью медного провода длиной $l = 200$ м. Площадь поперечного сечения каждой из двух жил провода $S = 1,5 \text{ мм}^2$. В газонокосилке произошло короткое замыкание. Найдите силу I тока, потребляемого от сети.

Решение. Короткое замыкание – это такое соединение двух контактов, при котором можно пренебречь сопротивлением соединяющего их элемента цепи по сравнению с сопротивлениями других элементов цепи. Поэтому в данном случае току придётся преодолевать только сопротивление провода на пути от розетки до газонокосилки и обратно, что можно рассматривать как проходжение тока через проводник длиной $2l$. По формуле (2.8) сопротивление такого проводника $R = \rho \cdot 2l/S \approx 4,3 \text{ Ом}$, где удельное сопротивление ρ меди может быть найдено по табл. 2.1 или в справочнике. По закону Ома (2.6) искомая сила тока $I = \frac{U}{R} = \frac{US}{2\rho l} \approx 52 \text{ А}$.

Полученное значение достаточно велико. Например, мощный чайник (на 1 кВт) потребляет около 5 А, а в бытовом счётчике электроэнергии обычно ставятся предохранители на 10 – 25 А. При рассмотренном коротком замыкании такой предохранитель выполнил бы своё предназначение и разорвал цепь. А если бы предохранителя не было, то сторел бы другой, более ценный, элемент.

§3. Элементы электрических цепей

В табл. 3.1 приведены схематические обозначения, названия и описания наиболее распространённых элементов электрических цепей.

При анализе схем в следующих параграфах очень часто будет использоваться следующее определение: два фрагмента цепи называются **эквивалентными**, если при замене одного на другой в любой цепи распределение токов и напряжений в остальной части цепи не изменится.

Не следует смешивать понятие *цепь* и *схема*. **Цепь** – это набор соединённых между собой элементов. **Схема** – это условное изображение цепи. Например, фраза «подключим вольтметр к схеме» является явно неправильной, так как означает, что мы рисуем на бумаге схему цепи и подсоединяем вольтметр к этому рисунку. Правильно: «подключим вольтметр к цепи» или «изобразим вольтметр на схеме».

Некоторые элементы электрических цепей

Обозначение на схеме	Название	Описание
	провод	идеальный проводник, имеющий нулевое сопротивление
	узел	точка соединения трёх или более проводов
	ключ	устройство для соединения и разъединения проводов
	резистор	проводник или элемент цепи, подчиняющийся закону Ома
	лампа накаливания	проводник, который сильно разогревается под действием тока и из-за этого светится
	источник	источник постоянного тока; длинная тонкая палочка – плюс, короткая толстая – минус
	диод	устройство, пропускающее ток только в одну сторону (в которую «указывает» треугольник)
	конденсатор	устройство, накапливающее заряд, разделённый на положительный и отрицательный
	амперметр	прибор для измерения силы тока
	вольтметр	прибор для измерения напряжения
	омметр	прибор для измерения сопротивления

Не следует также смешивать понятия *проводник*, *провод*, *резистор* и *сопротивление*. **Сопротивление** является физической величиной (с единицей измерения Ом), а не телом или элементом цепи. **Проводником** можно назвать любое тело, которое проводит электрический ток. Противоположностью проводнику является **изолятор** – тело, которое не проводит электрический ток. **Идеальный проводник** имеет минимальное теоретически возможное сопротивление, которое равно нулю. **Провод** – это длинный проводник, который используется для соединения других элементов между собой. Реальный провод имеет ненулевое сопротивление (см., например, задачи предыдущего параграфа). Но если сопротивление других элементов заметно больше, то мы можем *пренебречь* сопротивлением проводов и *считать* их идеальными проводниками. Если же сопротивление элементов сравнимо или даже меньше сопротивлений проводов, то сопротивления проводов следует учитывать, изображая их на схеме как резисторы. **Резистор** – это проводник или элемент цепи, подчиняющийся закону Ома, то есть он отличается от произвольного проводника

тем, что его сопротивление является константой и явно учитывается. Для произвольного проводника закон Ома справедлив *не всегда*. Например, закон Ома нельзя применять к лампочке, так как спираль (являющаяся проводником) при увеличении напряжения разогревается всё сильнее, а из-за роста температуры возрастает её сопротивление, то есть получается, что оно зависит от напряжения, что противоречит закону Ома. Элементы, подобные лампочке, называются *нелинейными*, так как вопреки закону Ома сила тока в них не прямо пропорциональна напряжению, а зависит от него более сложным образом.

§4. Последовательное и параллельное соединения

Для расчёта цепей особое значение имеют два типа соединений элементов: *последовательное* и *параллельное*. В ходе их анализа достаточно изобразить на схеме лишь рассматриваемый участок (а не всю цепь), поэтому возможные подключения других элементов цепи мы будем отмечать на схеме многоточиями (•••).

Два элемента, имеющих по два вывода у каждого, называются соединёнными *последовательно*, если есть точка соединения одного вывода первого элемента с одним выводом второго элемента и к этой точке *больше ничего не подключено*, либо если есть третий элемент, который соединён последовательно с каждым из двух рассматриваемых.

Два элемента, имеющих по два вывода у каждого, называются соединёнными *параллельно*, если есть точка соединения одного вывода первого элемента с одним выводом второго элемента, а также есть точка соединения другого вывода первого элемента с другим выводом второго элемента.

4.1 Основные свойства и примеры соединений

Последовательное соединение. Последовательно соединённые резисторы можно видеть на рис. 4.1 и 4.2, а конденсаторы – на рис. 4.3 и 4.4. Последовательно можно соединить любое количество элементов, причём они могут быть разных типов (рис. 4.5).

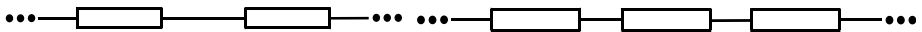


Рис. 4.1



Рис. 4.2



Рис. 4.3

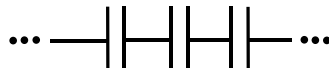


Рис. 4.4



Рис. 4.5

Вне зависимости от количества (пусть их будет n штук) и типа последовательно соединённых элементов справедливы следующие утверждения:

1. Общая сила тока через последовательно соединённые элементы равна силе тока через любой из них:

$$I = I_1 = I_2 = \dots = I_n. \quad (4.1)$$

2. Общее напряжение на последовательно соединённых элементах равно сумме напряжений на каждом из них:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n. \quad (4.2)$$

Параллельное соединение. Параллельно соединённые резисторы можно видеть на рис. 4.6 и 4.7, а конденсаторы – на рис. 4.8 и 4.9. Параллельно можно соединить любое количество элементов, причём они могут быть разных типов (рис. 4.10).

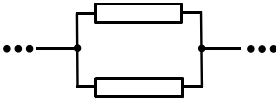


Рис. 4.6

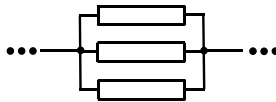


Рис. 4.7

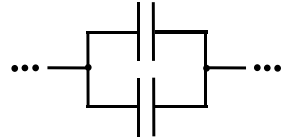


Рис. 4.8

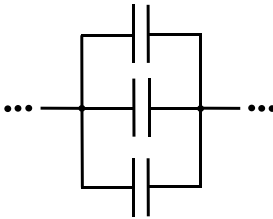


Рис. 4.9

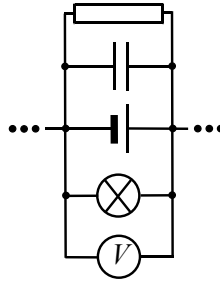


Рис. 4.10

Вне зависимости от количества (пусть их будет n штук) и типа параллельно соединённых элементов справедливы следующие утверждения:

1. Общая сила тока через параллельно соединённые элементы равна сумме сил токов через каждый из них:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n. \quad (4.3)$$

2. Общее напряжение на параллельно соединённых элементах равно напряжению на любом из них:

$$U = U_1 = U_2 = \dots = U_n. \quad (4.4)$$

Замечания. При использовании формул (4.2) и (4.3) очень важно помнить, что сумма в них подразумевается алгебраическая (с учётом знака). Если полярность некоторого элемента не соответствует полярности последовательного соединения в целом, то в (4.2) перед напряжением на этом элементе следует ставить минус. Если ток через некоторый элемент направлен против тока через параллельное соединение в целом, то в (4.3) перед силой тока через этот элемент следует ставить минус.

Другие случаи. Существует множество схем, элементы которых соединены *не* последовательно, но и *не* параллельно. Приведём в качестве примера

пару таких схем, которые даже получили собственные названия: «треугольник» (рис. 4.11) и «звезда» (рис. 4.12). Одним из методов упрощения схем является преобразование «треугольника» в «звезду».

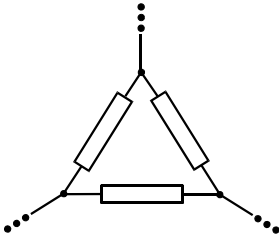


Рис. 4.11

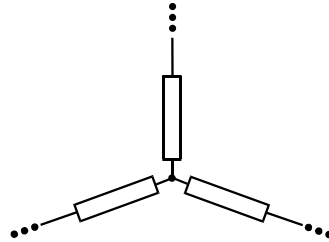


Рис. 4.12

Пример 4. Как (последовательно или параллельно) соединены батарейка, лапочка и ключ в карманном фонарике?

Решение. Рассмотрим оба соединения: последовательное (рис. 4.13) и параллельное (рис. 4.14). В первой схеме: когда ключ замкнут, лампочка горит; а когда разомкнут – не горит. Во второй схеме: когда ключ разомкнут, лампочка горит; а когда замкнут, существенная часть создаваемого батарейкой тока пойдёт через ключ (а не через лампочку). Про лампочку в этом случае мы пока (до следующего параграфа) ничего сказать не можем, однако ясно, что во второй схеме ток через батарейку идёт при любом положении ключа, то есть она разряжается всё время (даже при выключенном фонарике). Следовательно, вторая схема нерациональна и на практике не используется. Таким образом, ответ получен – элементы соединены последовательно.

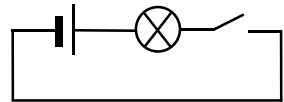


Рис. 4.13

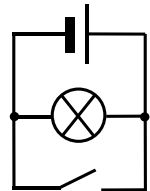


Рис. 4.14

Пример 5. Как (последовательно или параллельно) соединены несколько лампочек в обычной люстре?

Решение. Без сомнения всем случалось наблюдать люстру, в которой горят не все лампочки (остальные перегорели или выкручены). У перегоревшей лампочки разрывается спираль, и она больше не пропускает ток. Если бы лампочки были соединены последовательно, то в силу (4.1) сила тока через все лампочки была бы равна нулю, то есть ни одна лампочка не горела бы. Это противоречит экспериментальным наблюдениям, следовательно, лампочки в люстре соединены параллельно.

Пример 6. Как (последовательно или параллельно) соединены между собой телевизор и холодильник, включённый в сеть в одной комнате?

Решение. Напряжение сети (220 В) одинаково для каждого бытового электроприбора вне зависимости от того, что включено в соседнюю розетку. Это полностью соответствует свойству (4.4). Кроме того, можно непосредственно проследить путь проводов, и тогда от любого прибора мы придём к счётчику электроэнергии. Таким образом, все приборы в одной квартире соединены параллельно. Утверждать то же самое для приборов в разных квартирах нельзя, так как счётчик у них не общий.

4.2. Резисторы

Рассмотрим последовательное (рис. 4.15) и параллельное (рис. 4.16) соединения двух резисторов сопротивлениями R_1 и R_2 . В обоих случаях напряжения U_1 и U_2 на каждом из резисторов и силы токов I_1 и I_2 через них связаны законом Ома, который мы запишем в двух видах:

$$U_1 = R_1 I_1, \quad U_2 = R_2 I_2, \quad (4.5)$$

или

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U_2}{R_2}. \quad (4.6)$$

А вот общее напряжение U на обоих резисторах и общая сила тока I через них будут зависеть от способа подключения.

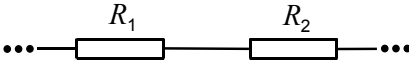


Рис. 4.15

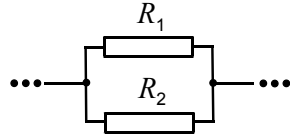


Рис. 4.16

Последовательное соединение. В случае последовательного соединения $U = U_1 + U_2$, $I = I_1 = I_2$. Используя эти свойства и соотношения (4.5), выразим общее сопротивление участка цепи, состоящего из двух резисторов:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U_1 + U_2}{I} = \frac{R_1 I_1 + R_2 I_2}{I} = \frac{R_1 I + R_2 I}{I} = R_1 + R_2.$$

Это означает, что *два последовательно соединённых резистора сопротивлением R_1 и R_2 эквивалентны одному резистору сопротивлением $R = R_1 + R_2$.*

Аналогичным образом можно доказать более общее утверждение: *последовательно соединённые резисторы сопротивлениями R_1, R_2, \dots, R_n эквивалентны одному резистору сопротивлением*

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n. \quad (4.7)$$

Параллельное соединение. В случае параллельного соединения $U = U_1 = U_2$, $I = I_1 + I_2$. Используя эти свойства и соотношения (4.6), выразим общее сопротивление участка цепи, состоящего из двух резисторов:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_1 + I_2} = \frac{U}{\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}} = \frac{U}{\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Это означает, что *два параллельно соединённых резистора сопротивлениями R_1 и R_2 эквивалентны одному резистору сопротивлением*

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (4.8)$$

Аналогичным образом можно доказать более общее утверждение: *параллельно соединённые резисторы сопротивлениями R_1, R_2, \dots, R_n эквивалентны одному резистору сопротивлением*

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}. \quad (4.9)$$

Отметим, что выражение (4.8) получено после алгебраического преобразования, пригодного только для случая двух резисторов, поэтому его формальное обобщение приводит к неправильному (даже по размерности!) результату:

~~$$R = \frac{R_1 R_2 \dots R_n}{R_1 + R_2 + \dots + R_n}.$$~~

Пример 7. Найдите сопротивление R изображённого на рис. 4.17 участка цепи. Значения отмеченных на рисунке параметров элементов известны.

Решение. Резисторы R_2 и R_3 соединены параллельно, поэтому их можно заменить одним резистором сопротивлением $R_{23} = R_2 R_3 / (R_2 + R_3)$. После замены резисторы R_1 и R_{23} оказываются соединены последовательно, значит, их можно заменить одним резистором сопротивлением $R_{123} = R_1 + R_{23}$. После второй замены остаётся один резистор, следовательно, искомое сопротивление

$$R = R_{123} = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

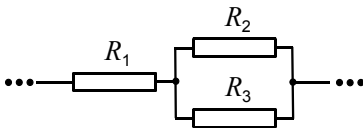


Рис. 4.17

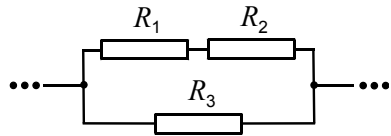


Рис. 4.18

Пример 8. Найдите сопротивление R изображённого на рис. 4.18 участка цепи. Значения отмеченных на рисунке параметров элементов известны.

Решение. Резисторы R_1 и R_2 соединены последовательно, поэтому их можно заменить одним резистором сопротивлением $R_{12} = R_1 + R_2$. После замены резисторы R_{12} и R_3 оказываются соединены параллельно, значит, их можно заменить одним резистором сопротивлением $R_{123} = R_{12} R_3 / (R_{12} + R_3)$.

После второй замены остаётся один резистор, следовательно, искомое сопротивление $R = R_{123} = \frac{R_{12}R_3}{R_{12} + R_3} = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{(R_1 + R_2) + R_3}$.

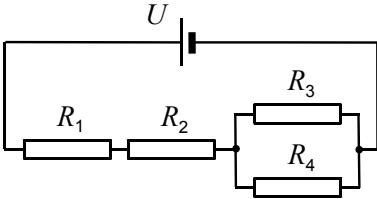


Рис. 4.19

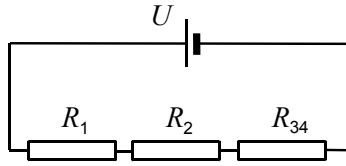


Рис. 4.20

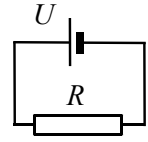


Рис. 4.21

Пример 9. Найдите отношение напряжений U_1 и U_2 на резисторах R_1 и R_2 , а также отношение сил токов I_3 и I_4 через резисторы R_3 и R_4 (4.19). Значения отмеченных на рисунке параметров элементов известны.

Решение. 1. В силу свойств последовательного соединения силы токов через резисторы R_1 и R_2 одинаковы: $I_1 = I_2$. По закону Ома $U_1 = R_1 I_1$ и $U_2 = R_2 I_2$. Отсюда искомое отношение $U_1/U_2 = R_1/R_2$.

2. В силу свойств параллельного соединения напряжения на резисторах R_3 и R_4 одинаковы: $U_3 = U_4$. По закону Ома $I_3 = U_3/R_3$ и $I_4 = U_4/R_4$. Отсюда искомое отношение $I_3/I_4 = R_4/R_3$.

Обратите внимание, что каждый из ответов не зависит от остальной части схемы. Таким образом, *напряжения на последовательно соединённых резисторах пропорциональны их сопротивлениям, а силы тока через параллельно соединённые резисторы обратно пропорциональны их сопротивлениям.*

Пример 10. Найдите силу тока I через источник постоянного тока, напряжение на котором постоянно и равно U (4.19). Значения отмеченных на рисунке параметров элементов известны.

Решение. Резисторы R_3 и R_4 соединены параллельно, поэтому их можно заменить на один резистор сопротивлением $R_{34} = R_3 R_4 / (R_3 + R_4)$. После замены резисторы R_1 , R_2 и R_{34} оказываются соединены последовательно (4.20), значит, их можно заменить одним резистором сопротивлением

$$R = R_1 + R_2 + R_{34} = R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

В результате в схеме остаются только источник и один резистор (4.21). Их можно рассматривать как соединённые и последовательно, и параллельно. В силу первого сила тока через резистор равна искомой, а в силу второго напряжение на резисторе равно U . Тогда по закону Ома

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}}.$$

4.3. Конденсаторы

Прежде чем перейти к расчётам цепей с конденсаторами, вспомним их основные свойства, которые были подробно изучены в рамках электростатики. **Конденсатор** – это система из двух изолированных друг от друга проводников (называемых *обкладками*), к которым подведены контакты. В *обычном* режиме работы конденсатора заряды обкладок *противоположны* (равны по модулю и имеют разные знаки). Это условие может быть нарушено, если на одной из обкладок изначально был ненулевой заряд, что можно осуществить только при «изготовлении» конденсатора (но не за счёт каких-либо подключений его к цепи, так как заряд притёкший по проводу на одну обкладку, заставляет такой же по величине заряд покинуть другую обкладку по второму проводу конденсатора). Далее всюду будем предполагать обычный режим, если иное не оговорено особо. **Заряд на конденсаторе** – это заряд одной из обкладок, выбор которой является такой же условностью, как и выбор положительного направления тока в определении силы тока. Следует чётко отличать приведённое выше понятие *заряда на конденсаторе*, применяемое при расчётах цепей, от *полного заряда конденсатора как тела* (суммы зарядов всех его частиц), который в обычном режиме равен нулю. Наличие зарядов на обкладках приводит к появлению между ними разности потенциалов, которая называется напряжением на конденсаторе. **Ёмкость** конденсатора C – это величина, равная отношению заряда q на конденсаторе к напряжению U на нём: $C = q/U$. Ёмкость измеряется в фарадах (Ф), причём $\Phi = \text{Кл/В}$.

Рассмотрим последовательное (рис. 4.22) и параллельное (рис. 4.23) соединения двух конденсаторов ёмкостями C_1 и C_2 . В обоих случаях напряжения U_1 и U_2 на каждом из конденсаторов и заряды q_1 и q_2 на них можно связать через ёмкости:

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1}, \quad U_2 = \frac{q_2}{C_2}, \quad (4.10)$$

или

$$q_1 = C_1 U_1, \quad q_2 = C_2 U_2. \quad (4.11)$$

А вот общее напряжение U на обоих конденсаторах и общий заряд q на конденсаторах в целом (заряд, протёкший через точку A в процессе зарядки) будут зависеть от способа подключения.

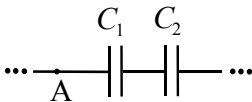


Рис. 4.22

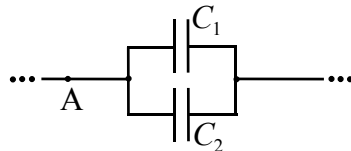


Рис. 4.23

Последовательное соединение. В случае последовательного соединения $U = U_1 + U_2$, а заряд q , протёкший через точку A , окажется на каждом из конденсаторов, то есть $q = q_1 = q_2$. Используя эти свойства и соотношения (4.10), выразим общую ёмкость участка цепи, состоящего из двух конденсаторов:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{U_1 + U_2} = \frac{q}{\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2}} = \frac{q}{\frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Это означает, что два последовательно соединённых конденсатора ёмкостями C_1 и C_2 , заряженных соответственно до напряжений U_1 и U_2 , эквивалентны одному конденсатору ёмкостью

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \quad (4.12)$$

заряженному до напряжения $U = U_1 + U_2$ и несущему заряд $q = CU$.

Аналогичным образом можно доказать более общее утверждение: последовательно соединённые конденсаторы ёмкостями C_1, C_2, \dots, C_n , заряженные соответственно до напряжений U_1, U_2, \dots, U_n , эквивалентны одному конденсатору ёмкостью C , заряженному до напряжения U (соответствующего заряду $q = CU$):

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}}, \quad U = U_1 + U_2 + \dots + U_n. \quad (4.13)$$

Отметим, что выражение (4.12) получено после алгебраического преобразования, пригодного для случая двух конденсаторов, поэтому его формальное обобщение приводит к неправильному (даже по размерности!) результату:

~~$$C = \frac{C_1 C_2 \dots C_n}{C_1 + C_2 + \dots + C_n}.$$~~

Параллельное соединение. В случае параллельного соединения $U = U_1 = U_2$, а заряд q , протёкший через точку A , разделится между конденсаторами, то есть $q = q_1 + q_2$. Используя эти свойства и соотношения (4.11), выразим общую ёмкость участка цепи, состоящего из двух конденсаторов:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q_1 + q_2}{U} = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{U} = \frac{C_1 U + C_2 U}{U} = C_1 + C_2.$$

Это означает, что два параллельно соединённых конденсатора ёмкостями C_1 и C_2 , несущие соответственно заряды q_1 и q_2 , эквивалентны одному конденсатору ёмкостью $C = C_1 + C_2$, несущему заряд $q = q_1 + q_2$ и заряженному до напряжения $U = q/C$.

Аналогичным образом можно доказать более общее утверждение: *параллельно соединённые конденсаторы ёмкостями C_1, C_2, \dots, C_n , несущие соответственно заряды q_1, q_2, \dots, q_n , эквивалентны одному конденсатору ёмкостью C , несущему заряд q (соответствующий напряжению $U = q/C$):*

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n, \quad q = q_1 + q_2 + \dots + q_n. \quad (4.14)$$

Замечания. Суммы напряжений в (4.13) и зарядов в (4.14) подразумеваются алгебраические (с учётом полярности заряженных конденсаторов). А вот в выражениях для общей ёмкости минусов никогда не бывает. Формулы (4.13) и (4.14) справедливы при *любых* напряжениях на конденсаторах (даже не только для обычного режима), в частности, когда некоторые конденсаторы заряжены, а некоторые – нет. Из понятия эквивалентности следует, что если к системе конденсаторов подключить вольтметр, то он покажет напряжение на эквивалентном конденсаторе, а если систему конденсаторов замкнуть проводом, то по нему протечёт заряд эквивалентного конденсатора.

Пример 11. Три конденсатора ёмкостями $C_1 = 20$ мкФ, $C_2 = 40$ мкФ и $C_3 = 40$ мкФ соединили последовательно с ключом (рис. 4.24). Конденсатор C_1 изначально был не заряжен, а напряжения на конденсаторах C_2 и C_3 были соответственно $U_2 = 2$ В и $U_3 = 3$ В.

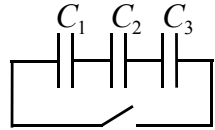


Рис. 4.24

Найдите заряд q , который протечёт через ключ после замыкания цепи.

Решение. Искомая величина – это заряд эквивалентного конденсатора. В соответствии с (4.13) сначала найдём его ёмкость

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = 10 \text{ мкФ},$$

а потом выразим напряжение

$$U = 0 \pm U_2 \pm U_3.$$

Знаки \pm означают, что нам неизвестно, в какой полярности конденсаторы соединены друг с другом. В зависимости от выбора знаков мы получим четыре значения для U : 5 В, 1 В, –1 В, –5 В. Поскольку в итоге нам нужно найти $|q| = C|U|$, то последние два значения U дадут тот же результат, что и первые два, поэтому их можно отбросить. Из оставшихся двух выбрать какое-то одно невозможно (не хватает данных). Поэтому задача имеет два ответа: $q_1 = 50$ мкКл и $q_2 = 10$ мкКл.

Пример 12. Цепь собрана из бесконечного числа звеньев, состоящих из двух конденсаторов ёмкостями C_1 и C_2 (рис. 4.25). Многоточия на этой схеме обозначают остальные звенья цепи, а не произвольные элементы. Чему эквивалентен участок цепи между точками A и B ?

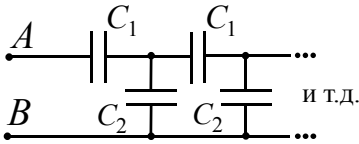


Рис. 4.25

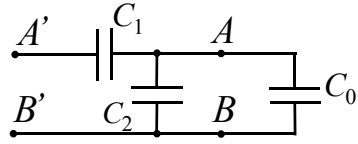


Рис. 4.26

Решение. Любая схема, состоящая *только* из конденсаторов и имеющая два вывода, эквивалентна одному конденсатору. Нужно лишь найти его ёмкость C_0 . Заменяем исходную цепь на эквивалентный ей конденсатор C_0 и добавим к схеме ещё одно звено (рис. 4.26). Пользуясь свойствами последовательного и параллельного соединений, рассчитаем ёмкость C'_0 участка цепи между точками A' и B' . Конденсаторы C_2 и C_0 соединены параллельно, поэтому их можно заменить на один конденсатор ёмкостью $C_{20} = C_2 + C_0$. Конденсаторы C_1 и C_{20} соединены последовательно, значит, их общая ёмкость

$$C'_0 = \frac{C_1 C_{20}}{C_1 + C_{20}} = \frac{C_1 (C_2 + C_0)}{C_1 + (C_2 + C_0)}. \quad (4.15)$$

Теперь сравним исходную и полученную цепи. Добавление одного звена не меняет факта бесконечности цепи. Поскольку все звенья одинаковы, то цепь с дополнительным звеном эквивалентна исходной, а их ёмкости равны: $C'_0 = C_0$, откуда после подстановки (4.15) получаем $C_0^2 + C_2 C_0 - C_1 C_2 = 0$. Решая полученное квадратное уравнение относительно C_0 и отбрасывая отрицательный корень, не имеющий физического смысла, находим

$$C_0 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{C_2^2 + 4C_1 C_2} - C_2 \right).$$

Рассмотренная задача является типичным примером целого класса задач – на бесконечные цепочки. В качестве элементов цепочки могут быть также резисторы, источники и т. д. Кроме того, звенья цепи могут быть не одинаковы, например, сопротивление резисторов в каждом следующем звене в два раза больше, чем в предыдущем. Вообще, звенья могут состоять из разнотипных элементов, например, в схеме на рис. 4.25 заменим мысленно все конденсаторы ёмкостью C_1 на резисторы. В этом случае цепь будет эквивалентна не одному элементу, а участку из нескольких разнотипных элементов.

В любом случае все подобные задачи решаются по стандартному алгоритму: 1) заменяем исходную бесконечную цепочку на эквивалентный ей элемент X и добавляем к нему ещё одно звено исходной цепочки; 2) рассчитываем параметры цепи с дополнительным звеном, полагая известными параметры элемента X ; 3) сравниваем полученную цепь с исходной и определяем соотношение их параметров; 4) поставляем в это соотношение выражение из пункта №2 и решаем уравнение.

§5. Источники постоянного тока

В качестве источников постоянного тока могут использоваться батарейки, аккумуляторы, солнечные батареи и т. д. Внутри любого источника обязательно существуют **сторонние силы** – неэлектростатические силы, действующие на носители заряда, например, механические и магнитные силы в генераторе, химические взаимодействия в батарейке. Важно, что сторонние силы *не* являются электростатическими, так как электростатическое поле *потенциально*, то есть не совершает работу при движении носителей заряда по замкнутой траектории. В результате же работы сторонних сил возрастает потенциальная энергия носителей заряда, которая переходит в другие виды энергии при протекании тока через остальные элементы цепи. Потенциал заряда на выводе «+» больше, чем потенциал заряда на выводе «-». На рис. 5.1 показано направление тока, возникающего при подключении резистора к источнику: во внешней по отношению к источнику части цепи ток идёт от плюса к минусу, а внутри источника – от минуса к плюсу. Направление «от минуса к плюсу» внутри источника будем называть **направлением действия** источника. С направлением действия однозначно связана **полярность** источника, определяющая, какой из выводов является плюсом, а какой – минусом.

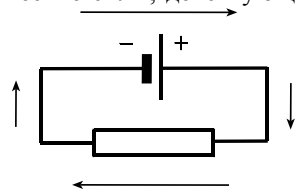


Рис. 5.1

Электродвижущая сила (ЭДС) \mathcal{E} источника – это его параметр, равный отношению работы A сторонних сил над зарядом q , протёкшим через источник в направлении его действия, к величине этого заряда: $\mathcal{E} = A/q$. Сравнив это определение с известным из электростатики определением напряжения между двумя точками, можно заключить, что ЭДС равна напряжению на выводах источника при отсутствии тока через него (в режиме *холостого хода*). **Внутреннее сопротивление** источника – это общее сопротивление всех его внутренних элементов. При возникновении тока через источник часть его ЭДС будет «тратиться» на преодоление внутреннего сопротивления, поэтому напряжение на выводах будет меньше, чем ЭДС. **Идеальный источник** имеет нулевое внутреннее сопротивление, поэтому напряжение на его выводах равно ЭДС вне зависимости от силы тока через него.

Реальный источник с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r (рис. 5.2) эквивалентен последовательно соединённому идеальному источнику с той же ЭДС \mathcal{E} и резистору сопротивлением r (рис. 5.3).

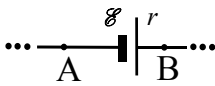


Рис. 5.2

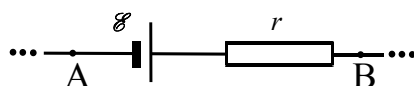


Рис. 5.3

Пример 13. Источник с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r подключили к резистору сопротивлением R (рис. 5.4). Найдите силу тока I в цепи. Рассмотрите также случай короткого замыкания источника.

Решение. Общее сопротивление цепи $R_{\text{общ}} = r + R$.

По закону Ома $I = \mathcal{E} / R_{\text{общ}} = \mathcal{E} / (r + R)$. В случае короткого замыкания $R = 0$, тогда $I_{\text{кз}} = \mathcal{E} / r$.

Последовательное соединение. Рассмотрим последовательное соединение источников с ЭДС $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ и внутренними сопротивлениями r_1, r_2, \dots, r_n .

Каждый источник (пусть он идёт под номером $i \leq n$) можно заменить на идеальный источник с ЭДС \mathcal{E}_i и резистор сопротивлением r_i . Все резисторы можно заменить одним резистором сопротивлением

$$r = r_1 + r_2 + \dots + r_n, \quad (5.1)$$

а все источники – одним источником с ЭДС

$$\mathcal{E} = \pm \mathcal{E}_1 \pm \mathcal{E}_2 \pm \dots \pm \mathcal{E}_n, \quad (5.2)$$

где знак перед каждой ЭДС зависит от полярности источника: если направление действия i -го источника совпадает с направлением действия заменяющего источника, то перед \mathcal{E}_i ставится плюс, иначе – минус. Полярность заменяющего источника можно изначально выбрать произвольно, так как при её изменении одновременно меняются и направление его действия, и знак ЭДС, что в силу математического правила «минус на минус даёт плюс» не изменяет никакие конечные формулы. Выражение (5.2) может быть получено из свойства сложения напряжений при последовательном соединении. Таким образом, *последовательные соединённые источники эквивалентны одному источнику с внутренним сопротивлением r (5.1) и ЭДС \mathcal{E} (5.2).*

Пример 14. Загорится ли лампочка, если минимально заметное свечение возникает при протекании через неё тока силой $I_0 = 30$ мА (рис. 5.5)? Параметры элементов:

$\mathcal{E}_1 = 9$ В, $\mathcal{E}_2 = 4,5$ В, $\mathcal{E}_3 = 1,5$ В, $r_1 = 20$ Ом, $r_2 = 10$ Ом,

$r_3 = 5$ Ом, $R = 40$ Ом, сопротивление лампочки считайте

постоянным и равным $R_x = 30$ Ом.

Решение. Заменяем все источники одним с внутренним сопротивлением $r = r_1 + r_2 + r_3 = 35$ Ом и ЭДС $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 = 3$ В (рис. 5.6). Обратите внимание на выбор знаков ЭДС (только источник \mathcal{E}_1 ориентирован так же, как и \mathcal{E}) и на отсутствие минусов в выражении для r (сопротивления

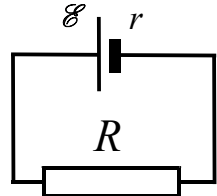


Рис. 5.4

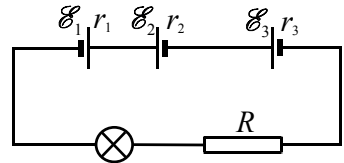


Рис. 5.5

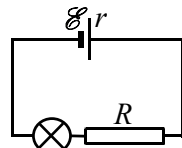


Рис. 5.6

всегда суммируются). Общее сопротивление цепи $R_{\text{общ}} = r + R + R_x = 105 \text{ Ом}$, сила тока $I = \mathcal{E} / R_{\text{общ}} \approx 29 \text{ мА}$. Поскольку $I < I_0$, то лампочка не загорится.

Параллельное соединение. Параллельно соединённые источники с ЭДС $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ и внутренними сопротивлениями r_1, r_2, \dots, r_n эквивалентны одному источнику с внутренним сопротивлением

$$r = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n}} \quad (5.3)$$

и ЭДС

$$\mathcal{E} = \left(\pm \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} \pm \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} \pm \dots \pm \frac{\mathcal{E}_n}{r_n} \right) \cdot r, \quad (5.4)$$

где знак перед каждой ЭДС определяется по тому же правилу, что и в случае последовательного соединения. Справедливость формул (5.3) и (5.4) будет доказана после изучения правил Кирхгофа.

Пример 15. Загорится ли лампочка (рис. 5.7)? Параметры элементов цепи те же, что и в предыдущем примере.

Решение. Заменяем все источники одним (5.6) с внутренним сопротивлением

$$r = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}} \approx 2,86 \text{ Ом} \approx 3 \text{ Ом}$$

и ЭДС

$$\mathcal{E} = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} - \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} + \frac{\mathcal{E}_3}{r_3} \right) \cdot r \approx 0,9 \text{ В}.$$

Общее сопротивление цепи $R_{\text{общ}} = r + R + R_x = 73 \text{ Ом}$, сила тока $I = \mathcal{E} / R_{\text{общ}} \approx 12 \text{ мА}$. Поскольку $I < I_0$, то лампочка не загорится.

Последние два примера показывают, что включение источников с различными направлениями действия крайне неэффективно (ведь лампочка так и не загорелась). Для сравнения рассмотрим схему с только одним (первым) источником. Тогда общее сопротивление цепи $R_{\text{общ}} = r_1 + R + R_x = 90 \text{ Ом}$, сила тока $I = \mathcal{E} / R_{\text{общ}} = 100 \text{ мА}$. Поскольку $I \approx 3,3 I_0 > I_0$, то лампочка загорится ярко. Таким образом, второй и третий источники лишь «мешали» первому.

Третий источник мешает даже в схеме на 5.7, хотя там направления действия \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_3 совпадают. Для простоты рассмотрим эту схему без второго источника, тогда оставшиеся два источника эквивалентны одному с внутренним сопротивлением r и ЭДС \mathcal{E} :

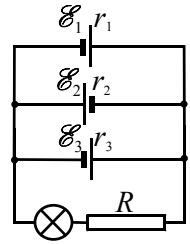


Рис. 5.7

$$r \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3}} = 4 \text{ Ом}, \quad \mathcal{E} = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_3}{r_3} \right) \cdot r = 3 \text{ В}.$$

Общее сопротивление цепи $R_{\text{общ}} = r + R + R_x = 74 \text{ Ом}$, сила тока $I = \mathcal{E} / R_{\text{общ}} \approx 41 \text{ мА}$. Поскольку $I \approx 1,4 I_0 > I_0$, то лампочка загорится, однако не так ярко, как в предыдущем случае. Причина такого эффекта от дополнительного источника заключается в том, что $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_3$, из-за чего источник с большей ЭДС «тратит» часть её на создание в источнике с меньшей ЭДС тока, противоположного направлению действия источника с меньшей ЭДС.

Выводом из приведённого анализа различных подключений источников является практическая рекомендация: для достижения максимальной эффективности батарейки следует соединять последовательно, причём с одинаковой полярностью (плюс одной соединяется с минусом другой). Если же их соединить параллельно, то даже при выключенной внешней цепи они достаточно быстро разрядятся одна через другую, так как не найдётся реальных батареек с точно совпадающими ЭДС.

§6. Правила Кирхгофа

Описанные до сих пор методы применимы лишь к схемам, которые можно представить в виде последовательных и параллельных соединений однотипных элементов. Однако большинство встречающихся на практике схем оказываются сложнее. Для их решения применяют два правила Кирхгофа.

Первое правило Кирхгофа. Сумма сил всех токов, вытекающих в произвольный узел, равна сумме сил всех токов, вытекающих из этого узла.

Напомним, что *узел* – это точка соединения трёх или более проводов. Первое правило Кирхгофа является следствием закона сохранения заряда, так как сумма втекающих токов характеризует заряд, приходящий в узел за некоторое время, а сумма вытекающих – заряд, выходящий из узла за то же время. Равенство этих сумм между собой связано с тем, что заряд в узле не накапливается (заряд может накапливаться только на пластинах конденсаторов). Забегая вперёд, отметим, что второе правило Кирхгофа можно рассматривать как следствие закона сохранения энергии.

Перед применением правил Кирхгофа нужно обозначить силы токов в каждой *ветви* цепи. **Ветвь** – это участок цепи между двумя узлами, не содержащий узлов внутри себя. Все элементы одной ветви соединены последовательно, поэтому силы токов через них одинаковы. Кроме того, нужно обозначить заряды на каждом конденсаторе. Выбор направления тока и выбор, какую из двух обкладок конденсатора считать заряженной положительно, можно делать совершенно произвольным образом. Если выбранное направление тока не совпадёт с фактическим, то просто его сила окажется отрицательной. Если же выбранные знаки зарядов обкладок конденсаторов не совпадут с фактическими, то заряд конденсатора будет отрицательный.

Если применить первое правило Кирхгофа ко *всем узлам*, то ровно одно из уравнений окажется следствием остальных. Чтобы этого избежать, достаточно

придерживаться простого алгоритма: *уравнения по первому правилу Кирхгофа следует записать для всех узлов кроме одного (любого)*.

Для формулировки второго правила Кирхгофа понадобится пара новых определений. **Контур** – это замкнутый участок цепи. Чтобы указать контур, нужно, начав с некоторой точки цепи, пройти по какой-либо траектории вдоль элементов цепи и вернуться в исходную точку. Выбрав контур, необходимо указать **направление обхода**. Для любого контура их существует ровно два: по часовой стрелке или *против*. Если контур задан перечислением элементов, то направление обхода определяется их порядком. При выборе контура на схеме удобнее отмечать направление обхода стрелочкой.

Второе правило Кирхгофа. *Алгебраическая сумма ЭДС источников в произвольном контуре равна алгебраической сумме напряжений на всех остальных элементах этого контура.* Знак каждого из слагаемых в обеих суммах зависит от направления обхода контура и определяется по соответствующим правилам знаков.

Правило знаков для источников. Если направление обхода контура совпадает с направлением действия источника, то перед его ЭДС ставится плюс, иначе – минус.

Правило знаков для резисторов. Если направление обхода контура совпадает с выбранным направлением тока I через резистор сопротивлением R , то напряжение на резисторе записывается как $U = RI$, иначе $U = -RI$.

Правило знаков для конденсаторов. Напряжение на конденсаторе ёмкостью C записывается как $U = q/C$, где q – заряд *первой встреченной* при обходе обкладки конденсатора, в качестве которого может оказаться как $+q$, так и $-q$ в зависимости от начального выбора знаков зарядов на обкладках.

Все перечисленные правила знаков для второго правила Кирхгофа проиллюстрированы на рис. 6.1. Обведённые выражения – это слагаемые, соответствующие конкретному элементу при обходе его слева направо.

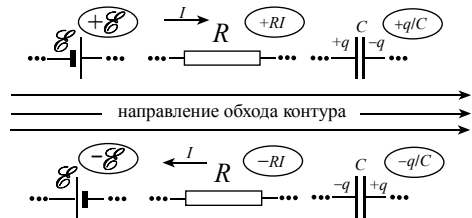


Рис. 6.1

Если применить второе правило Кирхгофа ко *всем* контурам, то ряд уравнений будут зависимыми, а система – переполненной. Если же какой-то из элементов не войдёт ни в один контур, то система будет неразрешимой. *Поэтому для записи уравнений по второму правилу Кирхгофа необходимо выбрать контура так, чтобы каждый элемент входил хотя бы в один из выбранных контуров, а общее число уравнений с учётом записанных по первому правилу Кирхгофа было равно числу неизвестных сил токов, то есть числу ветвей.*

Система уравнений, записанная с использованием обоих правил Кирхгофа, является полной, то есть позволяет найти все силы токов и напряжения.

Пример 16. Некоторая страшная схема имеет $u = 1024$ узла и $v = 2009$ ветвей. Найдите число p_2 контуров, к которым придётся применить второе правило Кирхгофа, чтобы найти все силы токов в цепи.

Решение. Число n уравнений в полной системе равно числу неизвестных сил токов, которое равно числу ветвей: $n = v$. Используя первое правило Кирхгофа, можно записать $p_1 = u - 1$ независимых уравнений. Для записи остальных уравнений потребуется второе правило Кирхгофа, то есть придётся рассмотреть $p_2 = n - p_1 = v - u + 1 = 986$ контуров.

Пример 17. Запишите систему уравнений, с помощью которой можно найти силы всех токов в цепи, схема которой изображена на рис. 6.2. Параметры элементов, отмеченные на рис., известны.

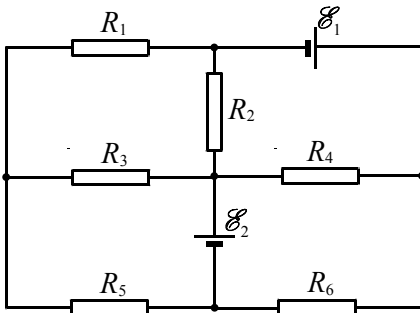


Рис. 6.2

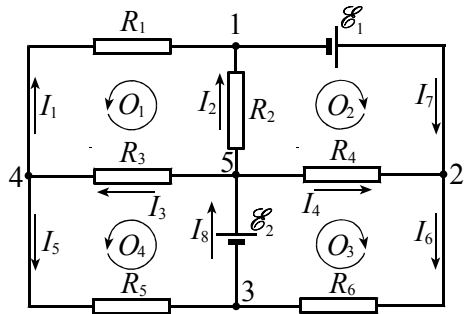


Рис. 6.3

Решение. 1. Обозначим направления и силы токов во всех ветвях (рис. 6.3).

2. Применим первое правило Кирхгофа для всех узлов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{узел 1: } I_1 + I_2 = I_7; \\ \text{узел 2: } I_4 + I_7 = I_6; \\ \text{узел 3: } I_5 + I_6 = I_8; \\ \text{узел 4: } I_3 = I_1 + I_5; \\ \text{узел 5: } I_8 = I_2 + I_3 + I_4. \end{array} \right.$$

Легко убедиться, что любое из записанных уравнений является следствием четырёх других, например, последнее уравнение можно получить как сумму остальных, поэтому в систему его можно не включать. Таким образом, не следуя первому алгоритму, мы сделали лишнюю работу.

3. Игнорировать второй алгоритм мы не будем, так как тогда пришлось бы выписать уравнения аж для 17 контуров (читателям предлагается найти все их самостоятельно). Применим второе правило Кирхгофа к четырём контурам (направления обходов обозначены на рис. 6.3 дугами со стрелочками):

$$\begin{cases} \text{контур } O_1 (1 - R_1 - 4 - R_3 - 5 - R_2 - 1): & 0 = -R_1 I_1 - R_3 I_3 + R_2 I_2; \\ \text{контур } O_2 (1 - \mathcal{E}_1 - 2 - R_4 - 5 - R_2 - 1): & \mathcal{E}_1 = -R_4 I_4 + R_2 I_2; \\ \text{контур } O_3 (2 - R_6 - 3 - \mathcal{E}_2 - 5 - R_4 - 2): & \mathcal{E}_2 = R_6 I_6 + R_4 I_4; \\ \text{контур } O_4 (4 - R_5 - 3 - \mathcal{E}_2 - 5 - R_3 - 4): & \mathcal{E}_2 = R_5 I_5 + R_3 I_3. \end{cases}$$

4. В итоге мы получим систему из 8 независимых уравнений. Незвестных сил токов тоже 8. Система является линейной и имеет единственное решение.

Пример 18. Докажите справедливость формул (5.3) и (5.4) на примере трёх источников постоянного тока.

Решение. Пусть три параллельно соединённых источника с ЭДС $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ и \mathcal{E}_3 и внутренними сопротивлениями r_1, r_2 и r_3 подключены к резистору сопротивлением R (рис. 6.4). Обозначим силы токов в четырёх ветвях через I_1, I_2, I_3 и I . Запишем правила Кирхгофа (контуры обходим по часовой стрелке, как и отмечено на рис. 6.4 дугами со стрелочками):

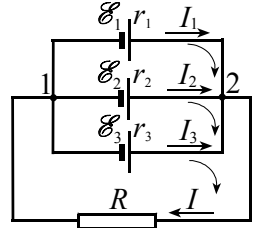


Рис. 6.4

$$\begin{cases} \text{узел 1:} & I = I_1 + I_2 + I_3; \\ \text{контур 1} - \mathcal{E}_1 - r_1 - 2 - R - 1: & \mathcal{E}_1 = r_1 I_1 + RI; \\ \text{контур 1} - \mathcal{E}_2 - r_2 - 2 - R - 1: & \mathcal{E}_2 = r_2 I_2 + RI; \\ \text{контур 1} - \mathcal{E}_3 - r_3 - 2 - R - 1: & \mathcal{E}_3 = r_3 I_3 + RI. \end{cases}$$

Выразим I_1, I_2 и I_3 из последних трёх уравнений:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - RI}{r_1}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - RI}{r_2}, \quad I_3 = \frac{\mathcal{E}_3 - RI}{r_3}.$$

Подставим полученные выражения в первое уравнение:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - RI}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2 - RI}{r_2} + \frac{\mathcal{E}_3 - RI}{r_3},$$

откуда найдём

$$I = \frac{\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} + \frac{\mathcal{E}_3}{r_3}}{1 + R \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)}.$$

Если бы вместо трёх источников был подключён один с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r , то сила тока в цепи была бы $I_{\text{эКВ}} = \mathcal{E} / (r + R)$. Преобразуем (6.1) так, чтобы можно было сопоставить формулы для I и $I_{\text{эКВ}}$:

$$I = \frac{\left(\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} + \frac{\mathcal{E}_3}{r_3} \right) \cdot \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}}}{\frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}} + R}.$$

Для эквивалентных фрагментов цепи равенство $I_{\text{экв}} = I$ должно выполняться при любых R , что возможно, лишь если

$$\mathcal{E} = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} + \frac{\mathcal{E}_3}{r_3} \right) \cdot \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}}, \quad r = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}}.$$

Итак, мы доказали справедливость формул (5.3) и (5.4) в случае трёх источников с одинаковой полярностью. Аналогично можно рассмотреть любой из случаев с различной полярностью источников.

§7. Энергия и мощность в электрических цепях

Напомним, что **потенциал** φ — это отношение потенциальной энергии W (в электрическом поле) пробного заряда q к величине этого заряда: $\varphi = W/q$. Напряжение, или разность потенциалов,

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{W_1 - W_2}{q}.$$

При перемещении заряда из точки с большим потенциалом φ_1 в точку с меньшим потенциалом φ_2 часть его потенциальной энергии переходит в другие виды энергии. Если заряд может свободно перемещаться, то возрастает его кинетическая энергия. Если же заряд участвует в создании тока, то выделяется теплота (в резисторе, кипятильнике и т. д.), совершается работа (в электромоторе, электромагните и т. д.) или запасается энергия в элементах цепи (в конденсаторе, аккумуляторе и т. д.). Практически всегда в результате действия электрического тока возникает более одного эффекта, например, при работе электромотора он ещё и греется из-за наличия сопротивления проводов. Однако для расчёта суммарной энергии W_e всех эффектов нет необходимости вникать в их суть, так как по закону сохранения энергии она равна уменьшению потенциальной энергии заряда q , протёкшего через участок цепи, находящийся под напряжением U :

$$W_e = W_1 - W_2 = Uq.$$

Мощность. Пусть теперь U — напряжение на некотором элементе цепи, I — сила тока через него, тогда за время Δt через элемент пройдёт заряд $\Delta q = I\Delta t$, а суммарная энергия всех эффектов составит $\Delta W_e = U \cdot \Delta q = UI\Delta t$.

Если же поделить эту энергию на длительность промежутка времени Δt , то мы получим общую мощность элемента, потребляемую им от остальной части цепи:

$$P = \frac{\Delta W_e}{\Delta t} = \frac{UI\Delta t}{\Delta t} = UI. \quad (7.1)$$

Получаемую энергию элемент преобразует в иные виды в соответствии со своим назначением. В зависимости от типа рассматриваемого элемента формуле (7.1) можно дать несколько интерпретаций.

1. Если рассматриваемый элемент – резистор, то на нём выделяется теплота, а тепловая мощность $P = UI$. Если известно сопротивление R резистора, то достаточно знать напряжение или силу тока (одно из двух), так как они связаны законом Ома, а (7.1) можно записать ещё в двух видах:

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = I^2 R. \quad (7.2)$$

Последнее выражение по сути эквивалентно закону Джоуля – Ленца, который был установлен Дж. П. Джоулем (1818-1889) и Э. Х. Ленцем (1804-1865) экспериментально в 1841 году: *количество теплоты Q , выделяющейся в проводнике, пропорционально квадрату силы тока I , сопротивлению R проводника и времени t протекания тока: $Q = I^2 R t$.*

2. Если рассматриваемый элемент – электромотор, то он совершает работу, а механическая мощность $P \leq UI$. Если пренебречь потерями из-за наличия сопротивления проводов, то можно считать $P = UI$.

3. Если рассматриваемый элемент – аккумулятор в режиме зарядки, то возрастает энергия химических связей в его растворе, а мощность зарядки $P \leq UI$. Доля потерь энергии при зарядке обычно достаточно велика, поэтому приближение $P = UI$ не всегда применимо.

Пример 19. В доме жителя города N испортилась изоляция на проводах, в результате чего её сопротивление в месте повреждения упало до $R = 100$ Ом. Сколько денег X потеряет за время $\tau = 24$ ч невезучий житель из-за утечки электроэнергии? Напряжение в сети $U = 220$ В, тариф на электроэнергию в городе N составляет $S = 1$ руб./кВт·ч.

Решение. Внесистемная единица измерения энергии «киловатт-час» равна 3,6 МДж, однако переводить все данные в СИ в этой задаче мы не будем. По формуле (7.2) найдём мощность потерь: $P = U^2/R = 0,484$ кВт. Потери энергии за указанное время $Q = P\tau = 11,6$ кВт·ч, что в денежном эквиваленте даёт $X = SQ = 11$ руб. 60 коп.

Пример 20. При работе электромотора от источника напряжением $U = 15$ В через него течёт ток силой $I = 1$ А. Найдите КПД (коэффициент полезного действия) η мотора, если сопротивление его обмотки $R = 1,2$ Ом.

Решение. По определению КПД – это отношение *полезной* энергии (мощности) к затраченной (полной). В нашем случае полная мощность $P = UI$, мощность потерь $P_- = I^2 R$, полезная мощность $P_+ = P - P_-$. КПД мотора

$$\eta = \frac{P_+}{P} = 1 - \frac{IR}{U} = 92\%.$$

Работа источника. При перемещении заряда из точки с меньшим потенциалом φ_1 в точку с большим потенциалом φ_2 сторонние силы совершают над зарядом положительную работу $A = W_2 - W_1$. Такая ситуация имеет место, например, внутри источника: в процессе прохождения заряда его потенциал увеличивается на величину ЭДС \mathcal{E} . Пусть через источник прошёл заряд Δq , тогда сторонними силами (источником) была совершена работа

$$A_{\text{ист}} = \mathcal{E} \cdot \Delta q. \quad (7.3)$$

Если заряд Δq прошёл за время Δt , то средняя сила тока через источник $I = \Delta q / \Delta t$, а его средняя мощность

$$P_{\text{ист}} = \frac{A_{\text{ист}}}{\Delta t} = \mathcal{E} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta t} = \mathcal{E} I. \quad (7.4)$$

При использовании формул (7.3) и (7.4) нужно помнить, что положительным считается заряд (или ток), протёкший через источник в направлении его действия. Заряд (или ток), протёкший в обратном направлении, считается отрицательным. Величина $A_{\text{ист}} < 0$ означает, что источник поглощает энергию из остальной части цепи, то есть ведёт себя как аккумулятор в режиме зарядки.

Пример 21. На аккумуляторе написано: 1,2 В и 0,9 А · ч. Что означают эти величины? Полагая аккумулятор полностью заряженным и пренебрегая тепловыми потерями, оцените, на сколько градусов можно с его помощью нагреть воду в стакане. Общая теплоёмкость стакана с водой $C = 1000$ Дж / °С.

Решение. Первая величина – это номинальное напряжение (ЭДС) аккумулятора: $\mathcal{E} = 1,2$ В. Вторая величина характеризует длительность работы аккумулятора без подзарядки в зависимости от интенсивности использования. Если аккумулятор создаёт большой ток, то он быстро разряжается, а если маленький, – то работает дольше. Оказывается, что произведение силы тока I на время t , в течение которого аккумулятор может создавать такой ток, можно *приблизительно* считать константой: $It \approx q_0$. Именно эта константа и является второй величиной: $q_0 = 0,9$ А · ч = 3240 Кл (внесистемная единица измерения заряда «ампер-час» равна 3600 Кл). Хотя формально q_0 – это заряд, он никоим образом не локализован в каком-то месте аккумулятора; это просто максимальный заряд, который аккумулятор может пропустить по цепи без подзарядки. Следовательно, максимальная энергия, которую может обеспе-

чить аккумулятор $W = \mathcal{E} q_0 = 3888 \text{ Дж} \approx 4 \text{ кДж}$. Искомое изменение температуры $\Delta T = W/C = 4^\circ\text{С}$.

Энергия конденсатора. Рассчитаем энергию W , запасённую конденсатором ёмкостью C , который заряжен до напряжения U . Если подключить к конденсатору резистор (рис. 7.1), то конденсатор будет через него разряжаться, тем самым играя роль источника, ЭДС которого постепенно уменьшается от U до 0. Начальный заряд на конденсаторе $q = CU$. Пусть к некоторому моменту на конденсаторе остался заряд q_0 , а через резистор протёк заряд Q , тогда в силу закона сохранения заряда $q_0 = q - Q$, а напряжение на конденсаторе в этот момент

$$V = \frac{q_0}{C} = \frac{q - Q}{C} = \frac{CU - Q}{C} = U - \frac{Q}{C}.$$

Зависимость $V(Q)$ изображена на рис. 7.2. После протекания заряда q конденсатор полностью разрядится.

Рассмотрим небольшой заряд ΔQ , протекание которого очень мало изменяет напряжение на конденсаторе. В течении этого промежутка времени конденсатор работает как источник с постоянной ЭДС V . Его работу можно выразить по формуле (7.3): $\Delta A = V \Delta Q$. Величине ΔA можно сопоставить на графике площадь заштрихованного прямоугольника, так как его стороны равны V и ΔQ . Рассуждая аналогично для других участков ΔQ ,

приходим к выводу, что работа, совершённая конденсатором в процессе разрядки, пропорциональна общей площади всех таких прямоугольников, равной площади фигуры под графиком $V(Q)$ – прямоугольного треугольника с катетами U и q :

$$A = \frac{1}{2} Uq.$$

Эта работа совершается за счёт запасённой в конденсаторе энергии, то есть $W = A$, следовательно, искомая энергия

$$W = \frac{1}{2} Uq = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{q^2}{2C}. \quad (7.5)$$

Преобразование энергии в цепи. Для полноты картины теперь осталось только объединить полученные в этом параграфе формулы в обобщающем законе преобразования энергии:

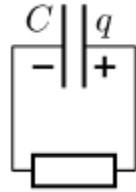


Рис. 7.1

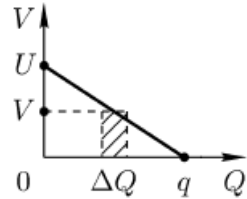


Рис. 7.2

$$A_{\text{ист}} = Q + W_{\text{внеш}} + \Delta W, \quad (7.6)$$

где $A_{\text{ист}}$ – суммарная работа всех источников цепи, Q – суммарное количество выделившейся теплоты на всех элементах цепи, $W_{\text{внеш}}$ – энергия, переданная внешним телам посредством иных взаимодействий (всех кроме теплового), $\Delta W = W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}}$ – изменение энергии, запасённой в элементах цепи. Все перечисленные величины рассчитываются для некоторого (одного и того же для всех) промежутка времени.

Пример 22. Незаряженный конденсатор ёмкостью C подключили к неидеальному источнику с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r (рис. 7.3). Найдите количество теплоты Q , которое выделится в источнике к моменту окончания зарядки конденсатора.

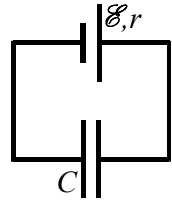


Рис. 7.3

Решение. К моменту окончания зарядки ток прекратится, поэтому в силу второго правила Кирхгофа напряжение на конденсаторе будет равно \mathcal{E} , а его заряд $q = C\mathcal{E}$. Используя (7.5), находим изменения энергии конденсатора $\Delta W = C\mathcal{E}^2/2 - 0$. Заряд q , накопленный на конденсаторе, прошёл через источник, значит, последний совершил работу $A_{\text{ист}} = \mathcal{E}q = C\mathcal{E}^2$. Иных взаимодействий в данной задаче не имеется, то есть $W_{\text{внеш}} = 0$. Поэтому из закона изменения энергии (7.6) находим $Q = A_{\text{ист}} - \Delta W = C\mathcal{E}^2/2$.