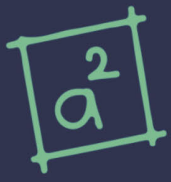
ПОЛНЫЙ КУРС СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ВСЁ, ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ, ЧТОБЫ НЕ БЫТЬ СЛАБАКОМ В МАТЕМАТИКЕ,



В ОДНОЙ БОЛЬШОЙ КНИГЕ

А. А. СПЕКТОР, Л. Д. ВАЙТКЕНЕ,
И. Е. ГУСЕВ

ВСЁ, ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ, ЧТОБЫ НЕ БЫТЬ СЛАБАКОМ В МАТЕМАТИКЕ, В ОДНОЙ БОЛЬШОЙ КНИГЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АСТ
2021

УДК 51
ББК 22.1
С71

Спектор, Анна Артуровна.

С71 Всё, что нужно знать, чтобы не быть слабаком в математике, в одной большой книге / А. А. Спектор, Л. Д. Вайткене, И. Е. Гусев. — Москва : Издательство АСТ, 2021. — 255, [1] с. : ил.

ISBN 978-5-17-135263-9 (Полный курс средней школы).

ISBN 978-5-17-136666-7 (Всё, что должны знать образованные родители).

Эта книга-конспект — действительно уникальное издание, ведь здесь представлен практически весь базовый курс математики. Числа и дроби, основные операции с ними и секреты быстрого счета, пропорции и проценты, уравнения и функции, начала геометрии и стереометрии — все, что поможет вам освоить азы математики, содержится на этих страницах. Причем книга очень удобно оформлена: все понятия и важные правила выделены шрифтом или цветом, имеются поясняющие рисунки, схемы и таблицы. Материал подается коротко, но емко, предельно понятно и интересно — в сопровождении множества примеров и исторических фактов. А чтобы закрепить и проверить полученные знания, в конце каждого раздела есть блок с заданиями.

Для среднего и старшего школьного возраста.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-17-135263-9 (Полный курс средней школы)
ISBN 978-5-17-136666-7 (Всё, что должны знать образованные родители)

© Оформление, обложка, иллюстрации ООО «Интеджер», 2021
© ООО «Издательство АСТ», 2021
В оформлении использованы материалы, предоставленные Фотобанком Shutterstock, Inc., Shutterstock.com
В оформлении использованы материалы, предоставленные Фотобанком Dreamstime, Inc., Dreamstime.com

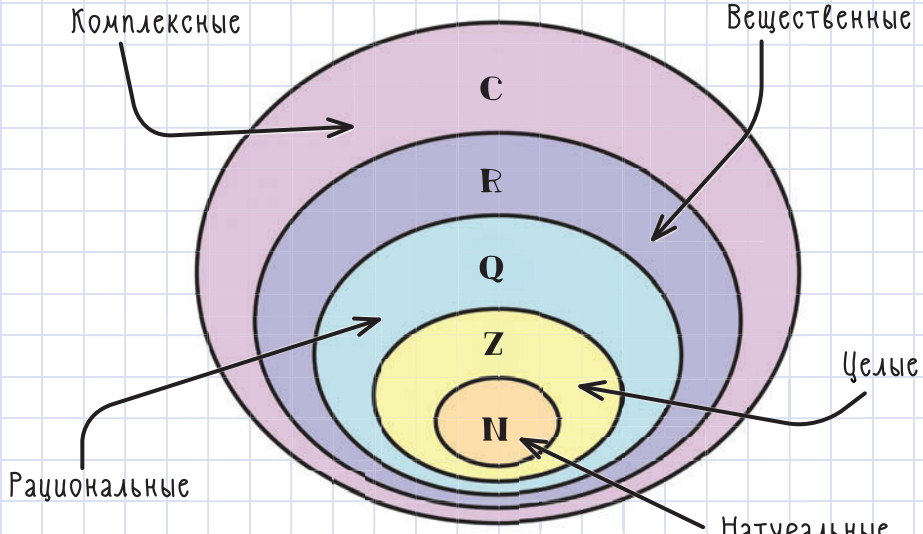
Содержание

Числа, цифры и системы счисления 4
Множества чисел 4
Системы счисления 7
Нумерация и счетные единицы 16
Разряды и классы 18
Натуральные и целые числа 22
Натуральные числа и натуральный ряд 22
Положительные и отрицательные числа 24
Целые числа 28
Операции с целыми числами 32
Сложение целых чисел 32
Сложение чисел с помощью числовой оси 35
Сложение отрицательных чисел 38
Вычитание целых положительных чисел 40
Вычитание отрицательных чисел 44
Умножение целых чисел 47
Деление целых чисел. Признаки делимости 61
Среднее арифметическое 72
Округление целых чисел 74
Дроби 80
Обыкновенные дроби 80
Сложение дробей 88
Вычитание дробей 90
Умножение дробей 93
Десятичные дроби. Общие сведения 98
Сложение десятичных дробей 101
Вычитание десятичных дробей 104
Умножение десятичных дробей 107
Деление десятичных дробей 110
Сравнение десятичных дробей 115
Округление десятичных дробей 117
Отношение чисел и пропорции 122
Отношение чисел 122
Пропорции. Основные сведения 125
Пропорции и решение задач 128
Прямая и обратная пропорциональная зависимость 131
Пропорции и рисунки в масштабе 136
Проценты 140
Основные сведения 140
Как перевести проценты в дробь и дробь в проценты? 144
Действия с процентами 146
Как вычислить процентные изменения? 152
Подсчет процентов с помощью пропорции 158
Алгебра 164
Общие сведения 164
Уравнения 166
Системы уравнений 168
Функции 170
Основы геометрии 174
История геометрии 174
Системы координат 185
Точка 189
Прямая 191
Луч 193
Отрезок 194
Ломаная 196
Угол 198
Прямоугольник и трапеция 202
Треугольник 204
Окружность и круг 208
Многоугольники 210
Правильные многоугольники в природе и архитектуре 212
Симметрия 214
Периметр 217
Площадь 222
Теорема Пифагора 228
Применения и приложения теоремы Пифагора 232
Стереометрия 236
Аналогии в геометрии 236
Теорема Пифагора в пространстве 240
Закон Эйлера для многогранников 243
Пять платоновых тел 244
Полуправильные многогранники 248
От античности к будущему 252

Числа, цифры и системы счисления

Множества чисел

Число – это одно из основных понятий математики. Оно используется для количественной характеристики, сравнения, нумерации объектов и их частей. Знак для обозначения числа называется цифрой. Мы сначала представим все разновидности чисел, а на следующих страницах расскажем о них подробно.



Иерархия чисел.

$$z = a + bi$$

z – Комплексное число
a – Действительная часть
b – Мнимая часть

Натуральные числа. Натуральные буквально означает «естественные». С их помощью подсчитываются отдельные предметы и объекты – люди, животные, звезды.

Целые числа – это все натуральные числа, числа, противоположные им по знаку (отрицательные), и ноль. Таким образом, натуральные числа оказываются частным случаем целых.

Рациональные числа – это числа, которые можно представить обыкновенной дробью, где числитель – целое число, а знаменатель – натуральное. Если рациональное число положительное, а его знаменатель равен единице, то получается целое натуральное число. Значит, натуральные числа, как и все целые, – частный случай рациональных.

Вещественные, или **действительные**, **числа** – это все положительные, отрицательные числа и ноль. Они могут быть целыми и дробными, рациональными и иррациональными. Таким образом, натуральные числа, как и целые числа, – частные случаи вещественных (действительных).

ИРРАЦИОНАЛЬНОЕ ЧИСЛО – это вещественное число, которое не может быть представлено в виде обыкновенной дроби, где числитель и знаменатель – целые числа. Иррациональное число изображается в виде бесконечной непериодической десятичной дроби. Например, число π как раз является иррациональным числом.

Комплексное число – это выражение вида $a + bi$, где a, b – действительные числа, а i – мнимая единица, или квадратный корень из -1. Число a называется действительной частью, а bi – мнимой частью комплексного числа $z = a + bi$. Таким образом, вещественные (действительные) числа – частный случай комплексных чисел.

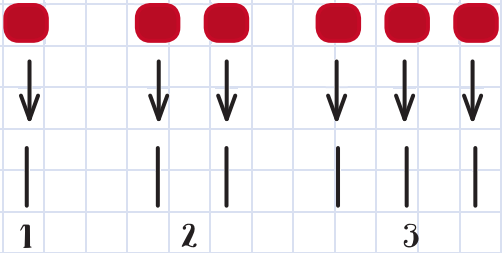
Комплексные числа используются в картографии, физике и особенно важны при описании мира элементарных частиц.

Системы счисления

Способы записи чисел в виде, удобном для прочтения и выполнения арифметических операций, называются системами счисления.

Системы счисления подразделяются на непозиционные, позиционные и смешанные. В позиционных системах значение одной и той же цифры зависит от места в записи числа, то есть разряда. В непозиционных системах счисления значение цифры не зависит от положения в записи числа.

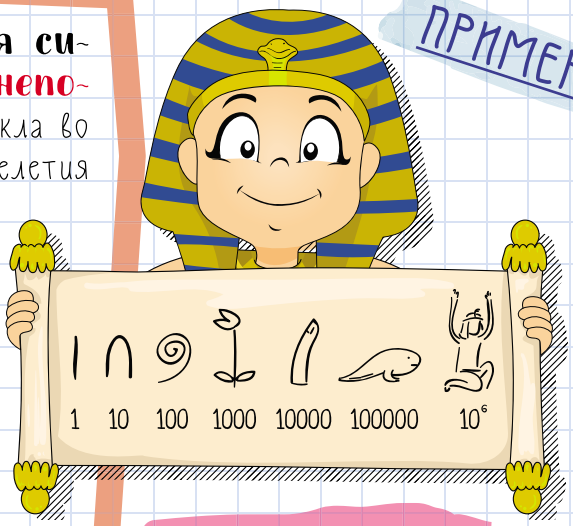
Единичная (унарная, разовая) система счисления – разумеется, **непозиционная**, так как количество выражается путем повторения одного и того же знака. Как правило, в качестве такого знака используются точки или вертикальные линии. Преимущество этой системы – ее простота, а очевидные недостатки – необходимость записывать огромное количество знаков и сложность последующего прочтения такого большого числа.



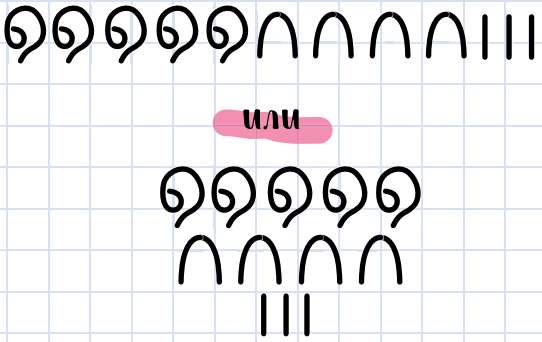
Несмотря на очевидную примитивность, элементы единичной системы счисления и метод группировки нашли широкое применение в статистике.

Древнеегипетская система счисления – непозиционная. Она возникла во второй половине III тысячелетия до н. э. Цифрами древнеегипетской системы были специальные иероглифы, обозначающие числа 1, 10, 100, 1000 и т. д. Числа записывались путем повторения цифр, причем каждая из них могла использоваться от 1 до 9 раз.

ПРИМЕР



Иероглифы – цифры древнеегипетской системы счисления.



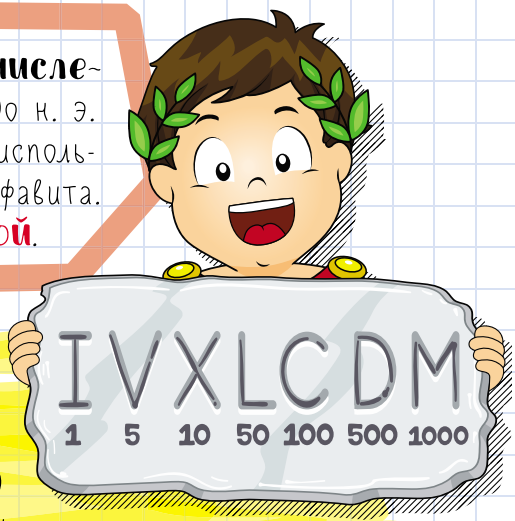
или

Число 543 в древнеегипетской записи выглядело так.

Запомните!

Фиксированной записи иероглифов не было предусмотрено: число записывали в одну линию или в столбик, и читать его можно было как справа налево, так и слева направо.

Римская система счисления появилась около 500 г. до н. э. Для обозначения цифр в ней использовались буквы латинского алфавита. Она является **непозиционной**.



Число 4 записывают не четырьмя палочками, а в виде IV. Меньшая цифра стоит перед большей – это означает, что единицу не прибавляют к пятерке, а отнимают от нее. Так же записывают числа 9 – IX, 40 – XL, 90 – XC и т. д.

1	I	16	XVI	90	XC
2	II	17	XVII	100	C
3	III	18	XVIII	200	CC
4	IV	19	XIX	300	CCC
5	V	20	XX	400	CD
6	VI	21	XXI	500	D
7	VII	22	XXII	600	DC
8	VIII	23	XXIII	700	DCC
9	IX	24	XXIV	800	DCCC
10	X	30	XXX	900	CM
11	XI	40	XL	1000	M
12	XII	50	L	2000	MM
13	XIII	60	LX	3000	MMM
14	XIV	70	LXX	4000	M$\overline{V}$
15	XV	80	LXXX	5000	$\overline{V}$
		10000	$\overline{X}$		

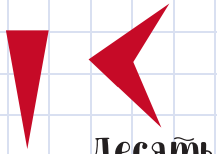
Римские числа от единицы до 10 000.

Важно!

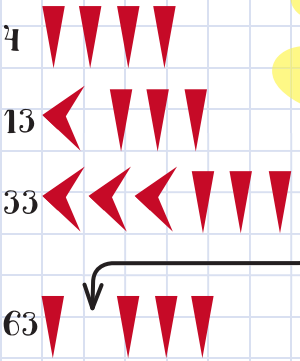
Любая позиционная система счисления характеризуется своим основанием. Основание позиционной системы счисления — количество различных цифр, используемых для изображения чисел в данной системе счисления. Например, в двоичной системе используется только два символа: 1 и 0, в десятеричной системе — 10, от 0 до 9.

Шестидесятеричная система счисления была изобретена шумерами в Древней Месопотамии в 3000 г. до н. э. Ее восприняли вавилоняне. В данной системе использовались два символа в виде клина, означавшие единицы и десятки. Вертикальный клин означал единицы, а горизонтальный – десятки.

ПРИМЕР



ПРИМЕР

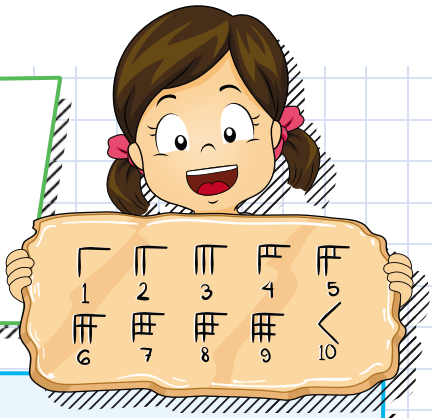


В вавилонской шестидесятеричной системе счисления числа от 1 до 59 записывались в непозиционной десятичной системе счисления, а начиная с 60 – в позиционной.

Расстояние между символами. Если бы между символами отсутствовало расстояние, то данная запись означала бы число 4.

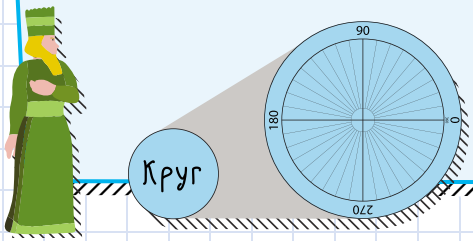
Важно!

Вавилонская шестидесятеричная система — древнейшая позиционная система в мире.



Это интересно

Древняя шестидесятеричная система не осталась в прошлом. Именно благодаря шумерам и вавилонянам окружность сегодня делится на 360 градусов, час — на 60 минут, а минута, на 60 секунд.

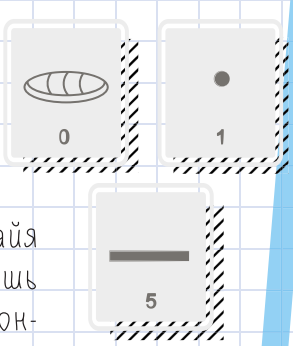


Шестидесятеричную систему счисления использовали древние и средневековые астрономы, в основном для представления дробей. Поэтому в Средневековье шестидесятеричные дроби называли «астрономическими». Они применялись для записи астрономических координат – углов, и эта традиция существует и сегодня. Кроме того, шестидесятеричная система используется для определения географических координат на Земле.

Важно!

Первый шестидесятеричный знак после запятой называется минута (′), второй — секунда (″). Название «минута» происходит от слова «минимум» и означает «малая часть», а «секунда» означает «вторая часть».

Система счисления у цивилизации майя возникла приблизительно в III в. н. э. Она является позиционной. В основу своей системы майя положили число 20, поэтому она также является двадцатеричной. Для записи любого числа майя использовали 20 цифр, включающие в себя лишь три символа: точку для обозначения 1, горизонтальную линию для 5 и ракушку для 0.



Майя записывали числа вертикально – снизу вверх. При этом верхние символы считались старшими, а самая нижняя позиция соответствовала разряду единиц. Число 20 считалось единицей второго разряда, а третий разряд образовывался не двадцатками, т. е. не был кратным числу 400, а восемнадцатками, т. е. был кратным числу 360. Объясняется это тем, что майя делили год на 18 месяцев по 20 дней в каждом и плюс дополнительные пять дней. Единицы же следующих разрядов вновь равнялись 20 единицам предшествующего разряда. Поэтому разряды системы майя можно представить в следующем виде: 1, 20, 20×18, $20^2 \times 18$, $20^3 \times 18$...

Важно!

Арифметические действия у майя были предназначены для календарных расчетов. Когда производились расчеты, связанные с календарем майя, жрецы прибегали к помощи «таблицы умножения». Она включала в себя перемножение чисел 13, 52, 65, 78 и 91. Так как у майя не существовало понятия дробей, они всегда старались достичь циклов, состоящих из целых чисел.

ПРИМЕР

Число 100 в записи майя будет выглядеть так:

Разряд двадцаток

Разряд единиц

т. е. $0 \times 1 + 5 \times 20 = 0 + 100 = 100$.

Число 1807 будет выглядеть так:

Разряд 20 × 18

Разряд двадцаток

Разряд единиц

т. е. $5 \times 20 \times 18 + 0 \times 20 + 7 = 5 \times 360 + 0 + 7 = 1800 + 7 = 1807$.

Это интересно

Самое большое число, найденное в памятниках культуры майя, выглядит следующим образом:

$9 \times (18 \times 20^4) +$

$6 \times (18 \times 20^3) +$

$14 \times (18 \times 20^2) +$

$13 \times (18 \times 20) +$

$15 \times 20 +$

1

26 889 781

В **индо-арабской системе счисления** для записи абсолютно всех чисел используются 10 основных символов, или цифр, в различных комбинациях. Это цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Индо-арабская позиционная десятеричная система счисления, которой мы пользуемся сегодня, возникла в Индии около V в. н. э., была воспринята арабами, и потому мы сегодня называем привычные нам числа арабскими, хотя на самом деле они индийские.

В этой системе легко считать группами по 10 символов, т. е. десятками. При этом 10 десятков заменяют одной сотней, 10 сотен – тысячей и т. д.

Значение каждой цифры в индо-арабской записи определяется ее разрядом, то есть местом в последовательности цифр, которые образуют эту запись, при этом читать нужно слева направо. Например, в последовательности символов 2538 цифра 2 означает две тысячи, цифра 5 – пять сотен, цифра 3 – три десятка и цифра 8 – восемь единиц.

Каждое число индо-арабской системы счисления можно представить в виде суммы множителей. Например:

$8364 = 8 \times 1000 + 3 \times 100 + 6 \times 10 + 4.$

Важно!

В давние времена самым простым приспособлением для счета предметов являлись пальцы. Издавна люди ходили босиком, поэтому могли использовать для счета пальцы не только рук, но и ног, а это расширяло возможности счета за пределы десяти. Люди фактически пользовались двадцатеричной системой счисления.

Кипу – узелковый счет инков.

Это интересно

В разных странах мира, кроме пальцев, использовали веревочные счеты с узелками, и, например, инки для запоминания чисел задействовали шнуры разных цветов с завязанными на них узлами.

Нумерация и счётные единицы

Познакомившись с позиционными системами счисления, рассмотрим подробнее такие понятия, как нумерация, разряды и классы.

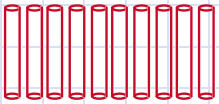
Нумерация в математике – это способ записи чисел, для которых используются цифры. Кроме того, нумерация – это способ обозначения предметов, расположенных в определенной последовательности.

Тот способ нумерации, которым мы пользуемся сегодня, называется десятичным, так как в основе его лежит число 10.

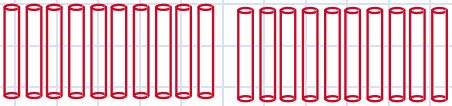
Десятками можно считать так же, как и единицами.
Например: 2 десятка, 3 десятка и т. д.

ПРИМЕР

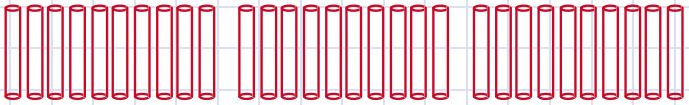
1 десяток = 10 единиц,
1 сотня = 10 десятков,
1 тысяча = 10 сотен.



Один десяток

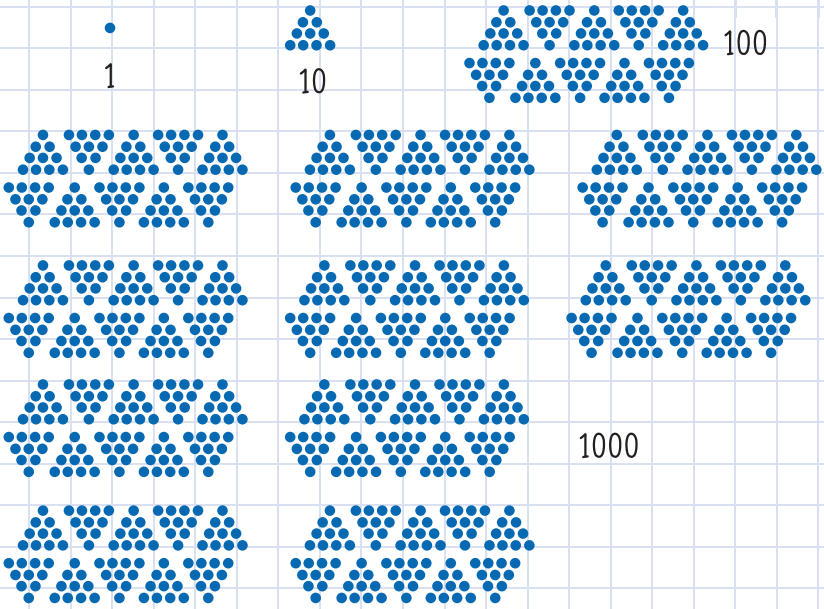


Два десятка



Три десятка

Счетные единицы связаны между собой следующим образом: каждые десять единиц объединяются в один десяток, десять десятков – в сотню, десять сотен – в тысячу, тысяча тысяч – в миллион.

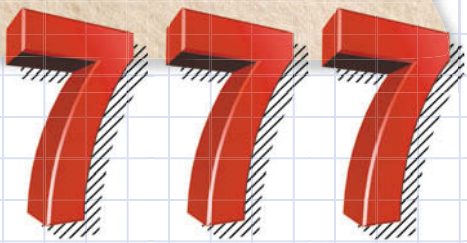


Это интересно

В русском языке существует слово «дюжина», так обозначают двенадцать предметов. Эта счетная единица осталась от еще одной старинной системы счисления — двенадцатеричной. Подсчет дюжинами был распространен очень широко и сейчас еще не ушел в прошлое. Например, столовые приборы — ложки, ножи, вилки, — продавали наборами по 12 штук, да и сейчас посуда по традиции продается сервизами на 12 или 6 персон.

Разряды и классы

Числовой разряд – это место, на котором в записи числа стоит цифра. Одна и та же цифра будет иметь разные значения в зависимости от того, в каком разряде она оказалась.



Рассмотрим число 869.

Разряд единиц – самый младший, им заканчивается любое целое число. В числе 869 цифра 9 стоит на последнем месте, в разряде единиц, и означает 9 единиц.

Разряд десятков стоит перед разрядом единиц. В числе 869 цифра 6 означает 6 десятков, так как она стоит в разряде десятков перед единицами.

Разряд сотен находится перед разрядом десятков: в числе 869 цифра 8 означает 8 сотен.

Важно!

Число, состоящее из одной цифры, называется однозначным. Число, состоящее из двух и более цифр, называется многозначным.

Каждые три разряда объединяются в класс, у каждого класса есть свой порядковый номер и название.

Бывает так, что в числе какой-либо разряд отсутствует. Тогда на его месте стоит цифра 0. Например: в числе 730 содержится 7 сотен, 3 десятка и 0 единиц.

Первый класс – это класс единиц, который состоит из первых трех разрядов: единиц, десятков и сотен.

1
10
100
} Класс единиц

Важно!

Чтобы прочитать многозначное число, нужно по очереди слева направо назвать число единиц каждого класса, добавив название класса.

Второй класс – это класс тысяч, в состав которого входят три разряда: единицы тысяч, десятки тысяч и сотни тысяч.

1000
10 000
100 000
} Класс тысяч

Третий класс, или **класс миллионов**, образуют три разряда: единицы миллионов, десятки миллионов и сотни миллионов.

1 000 000
10 000 000
100 000 000
} Класс миллионов

Укажите разряды и классы в числе 976231.

Проверьте себя и запишите ответ:

1. Чем число отличается от цифры?
2. Какие числа называются натуральными?
3. Являются ли отрицательные числа натуральными?
4. Какие числа относятся к рациональным?
5. К каким множествам принадлежит число 5?
6. К каким множествам принадлежит число $\frac{1}{7}$?
7. К каким множествам принадлежит число $\frac{1}{4}$?
8. К каким множествам принадлежит число π?
9. К каким множествам принадлежит число $-3{,}5$?
10. Поставьте в соответствие этим римским числам арабские: XXXVI, LX, C.
11. Является ли вавилонская система счисления позиционной?
12. Кто изобрел современные цифры, которыми мы пишем?
13. Чем разряд отличается от класса?
14. Сколько числовых разрядов в классе?
15. Назовите разряды числа 587.
16. Сколько классов в этом числе: 786398775?

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

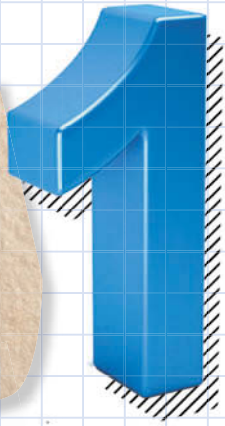
15.

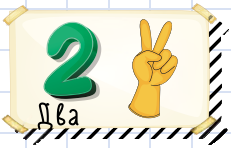
16.

Натуральные и целые числа

Натуральные числа и натуральный ряд

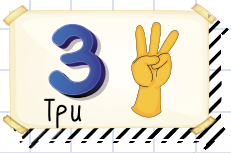
Натуральные числа, как вы уже знаете, – это числа, которые используются для счета предметов. Это все целые положительные числа. Наименьшим натуральным числом является 1, а вот наибольшего натурального числа не существует. Множество всех натуральных чисел обозначается символом **N**.

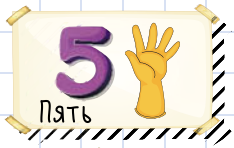




Последовательность всех натуральных чисел – это **натуральный ряд**. Он начинается так: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14…

Этот ряд бесконечен, его можно продолжать как угодно долго.





Свойства натуральных чисел и операций с ними изучают арифметика и теория чисел – одна из областей высшей математики.

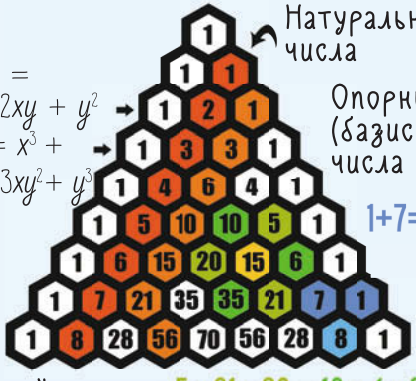
К замкнутым операциям (то есть операциям, результат которых также является натуральным числом) относят сложение, умножение, возведение в степень, вычитание, деление. Подробно эти операции будут разобраны позже.

Это интересно

Треугольник Паскаля образован рядами натуральных чисел, расположенных сверху вниз. Количество чисел в каждом ряду на одно больше, чем в вышележащем. Каждое число, кроме боковых, равно сумме двух над ним расположенных ($3 = 2 + 1$, $10 = 4 + 6$). Кроме того, выделяя некоторые числа в треугольнике, можно увидеть интересные фигуры.

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$



«Цветочный» узор ➡ 5 x 21 x 20 = 10 x 6 x 35 = 2100

Узор (рисунок) «клюшка» ➡ 1+3+6+10+15+21 = 56

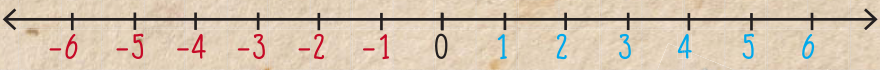
Треугольник Паскаля.

Важно!

Нуль не относят к натуральному ряду, но если его добавить, мы получим расширенный натуральный ряд.

Положительные и отрицательные числа

Положительные числа – это те числа, которые соответствуют точкам в части координатной прямой, расположенной справа от начала отсчета. Отрицательные числа – это те числа, которые соответствуют точкам в части координатной прямой, расположенной слева от начала отсчета.



Числовая ось, или координатная прямая, – это линия, на которой указаны начало отсчета (точка ноль) и единичные отрезки, а положение точки задается положительным или отрицательным числом.

Отрицательные числа всегда указываются со знаком «–» (минус), так как они меньше нуля.

Это интересно

Отрицательные числа ввел индийский математик Брахмагупта в 628 г. Он сформулировал правила четырех арифметических действий над отрицательными числами. Индийский математик XII в. Бхаскара обратил внимание на то, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения — положительное и отрицательное.

$$\sqrt{-1} = i$$

$$i^2 = -1$$

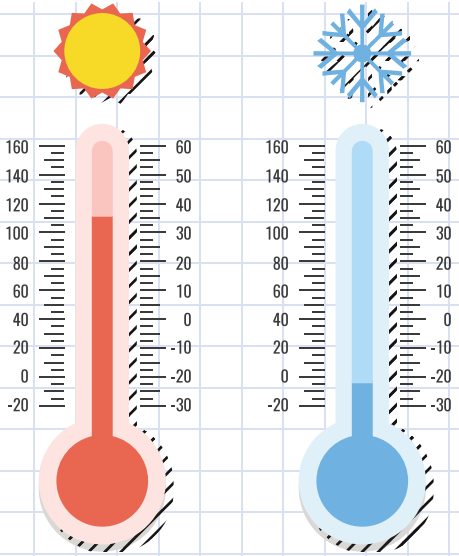
$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

Важно!

Бхаскара, рассмотрев вопрос о квадратном корне из отрицательных чисел, пришел к выводу, что такой корень не существует, так как иначе его квадрат должен быть отрицательным числом, а отрицательное число не может быть квадратом. Однако сегодня квадратный корень из минус единицы считается мнимой единицей, а числа, куда входит мнимая единица, — **комплексными**.

В жизни нам нередко приходится сталкиваться с использованием **отрицательных чисел**. И самый распространенный пример – температурная шкала, т. е. обычный уличный термометр, глядя на который, можно сказать, какая температура на улице и что нужно надеть.



На топографических картах места, находящиеся ниже уровня моря, помечают **отрицательными числами**.

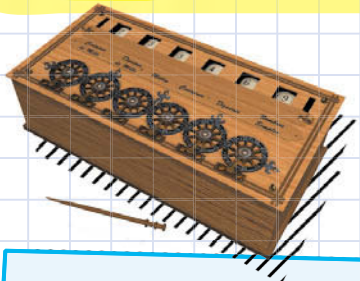
На некоторых приборах, например на устройстве для измерения силы тока, также используется шкала с **отрицательными числами**.

Модулем действительного числа называется абсолютная величина этого числа. Положительное и отрицательное числа, равные по модулю, называются противоположными.

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

По своему «физическому» смыслу отрицательное число означает уменьшение, убыль имеющегося количества. Причем это начальное количество может и не быть положительным числом: складывая два отрицательных числа, получаем новое отрицательное число, равное по модулю сумме модулей слагаемых.

Например: $|-10| + |-5| = 15$.



Важно!

При взятии модуля числа нужно отбросить его знак.

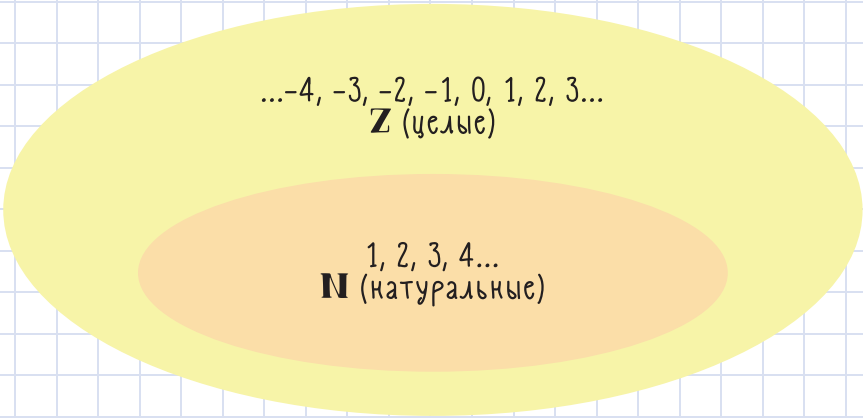
Например: $|-5| = 5$.

Это интересно

Большинство математиков XVI—XVII вв. не признавали отрицательные числа настоящими корнями алгебраических уравнений. Французский математик Франсуа Виет, основоположник символической алгебры, полностью отвергал отрицательные числа. А Блез Паскаль, один из основоположников теории вероятности, изобретший в 19 лет счетную машину для складывания и вычитания, считал вычитание числа 4 из 0 операцией, лишенной всякого смысла. Он утверждал: «Я знаю людей, которые никак не могут понять, что если из нуля вычесть четыре, то получится нуль».

Целые числа

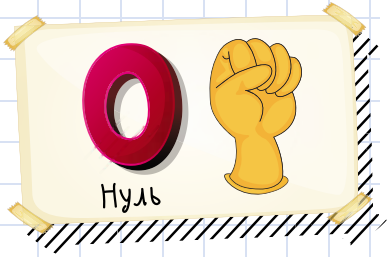
Натуральные числа и противоположные им отрицательные числа, а также нуль объединены в множество **целых чисел**. Иными словами, целые числа, как вы уже знаете, – это все натуральные числа и те, что противоположны им по знаку, а также 0 (нуль). Не существует как самого большого, так и самого маленького целого числа. Совокупность целых чисел в математике обозначается латинской буквой **Z**.



Для множества всех целых чисел справедливы те же законы сложения и умножения, что и для чисел натуральных. Вычитание и деление целых чисел определяются как действия, обратные соответственно сложению и умножению.

В математике большая роль отводится числу 0. Понятие нуля появилось в позиционной системе счисления как символ, необходимый для того, чтобы показать отсутствие значения в соответствующем разряде, чтобы не путать, например, записи 5, 50, 500. В некоторых системах счисления вместо какого-либо символа оставляли пустое место, но такое обозначение как раз и приводило к путанице. Привычный нам нуль и его обозначение как кружочка впервые встречаются в древнейшем индийском математическом тексте – «Манускрпте Бакхшали», созданном не позднее IX–X вв.

Индийцы называли цифру нуль словом «сунья» – пустота, арабы – «сифр», откуда пошли слова «цифра» и «зеро», что также означает «нуль». В Западной Европе его называли и «circulus» (круг), и nulla figura (никакой знак). Сегодня это полноценная цифра, обозначающая полноценное целое число, без которого невозможна была бы современная наука и техника.

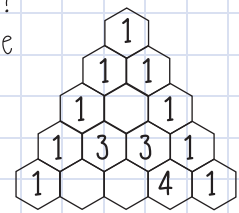


Важно!

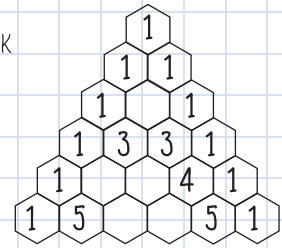
В двоичной системе счисления, применяемой в программах для компьютеров, используется только два целых числа — нуль и единица.

Проверьте себя и запишите ответ:

1. Относится ли нуль к натуральному ряду?
2. Является ли нуль целым числом?
3. Какое натуральное число самое большое?
4. Сколько существует натуральных чисел?
5. Какие числа из перечисленных являются натуральными: 10, −6, 3, −5, 6, 299?
6. Какие числа из приведенных являются целыми, но не являются натуральными: 12, −8, 36, 0, 5, −10, 189, −250?
7. Впишите в треугольник Паскаля недостающие числа.



8. Впишите в треугольник Паскаля недостающие числа.



9. Какое натуральное число самое маленькое?
10. Назовите области применения отрицательных чисел.
11. Являются ли натуральные числа целыми?
12. Что такое модуль?
13. Как называются числа, противоположные по знаку, но равные по модулю?
14. Найдите суммы чисел: $|5| + |-6| + |1|$; $|10| + |-12| + |2|$; $|9| + |-9| + |-10|$; $|-12| + |6| + |-18|$.
15. Когда и кто ввел в математику отрицательные числа?
16. Был ли прав Блез Паскаль, когда решал пример $0 - 4$?

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

Операции с целыми числами

Сложение целых чисел

Сложение – это действие, в результате которого из двух и более чисел получается новое, содержащее столько единиц, сколько было во всех складываемых числах. Сложение обозначается знаком «+» (плюс).

$1 + 1 =$

$2 + 2 =$

$3 + 3 =$

Сумма, то есть результат сложения двух чисел, имеющих разные знаки, есть число, которое имеет тот же знак, что и слагаемое с большим модулем; чтобы найти модуль суммы, надо из большего модуля вычесть меньший.

$1 + 1 = 2$

Записать сложение в буквенном виде можно следующим образом:

$a + b = c,$

где a и b – слагаемые, а c – сумма.

Если к числу прибавить ноль, то оно не изменится.

Переместительное свойство сложения: от перемены мест слагаемых сумма не меняется.

ПРИМЕР

$10 + 8 = 18$ и $8 + 10 = 18$.

В обоих случаях сумма осталась прежней, т. е. она не изменилась от перестановки слагаемых.

В буквенном выражении переместительное свойство можно записать так:

$a + b = b + a$.

Сочетательное свойство сложения: результат сложения трех и более слагаемых не изменится, если какие-нибудь из слагаемых заменить на их сумму.

В буквенном выражении сочетательное свойство можно записать так:

$(a + b) + c = a + (b + c)$.

$$a + b = b + a$$

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Важно!

Получить сумму трех чисел можно двумя способами.

1. Сложить два первых числа, а потом прибавить к ним третье:

$7 + 3 + 6 = (7 + 3) + 6 = 10 + 6 = 16$.

2. Получить сумму второго и третьего чисел, а потом прибавить к ним первое:

$7 + 3 + 6 = 7 + (3 + 6) = 7 + 9 = 16$.

Как научиться быстро складывать двузначные числа? Сначала нужно сложить единицы, а потом десятки.

ПРИМЕРЫ

1. $46 + 18$.

$46 = 40 + 6$, а $18 = 10 + 8$.

Сначала нужно сложить единицы ($6 + 8 = 14$, где $14 = 10 + 4$).

Затем сложите десятки ($40 + 10 + 10 = 60$), а потом прибавьте к ним единицы ($60 + 4 = 64$).

2. $63 + 58$.

$63 = 60 + 3$, а $58 = 50 + 8$.

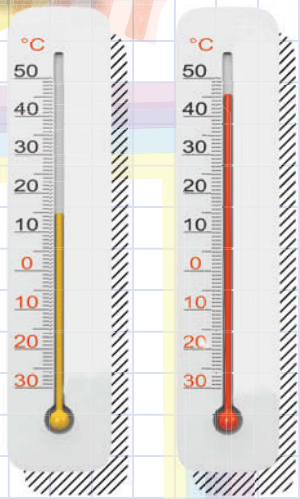
Складывайте единицы ($3 + 8 = 11$, где $11 = 10 + 1$).

Затем складывайте все десятки ($60 + 50 + 10 = 120$), а потом прибавьте к ним единицы ($120 + 1 = 121$).

Попробуйте решить в уме пример $23 + 37 + 75$, следуя объяснениям на этой странице. Перед этим включите секундомер и проверьте, сколько времени у вас на это ушло. Потренируйтесь с другими двузначными числами.

Сложение чисел с помощью числовой оси

Сложение чисел с разными знаками удобно делать с помощью **числовой оси**.

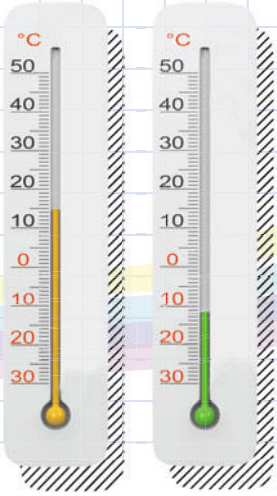


ПРИМЕР 1

Первоначальная температура была 15 °C, а затем она изменилась – увеличилась на 30 °C, т. е. изменение составило 30 °C: 15 °C + 30 °C = 45 °C.

ПРИМЕР 2

Первоначальная температура уменьшилась. Изменение составило –30 °C (отрицательное число). 15 °C + (–30 °C) = = –15 °C.

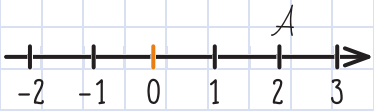


Складываем два целых положительных числа с помощью числовой оси.

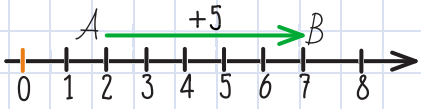
ПРИМЕР

$2 + (+5)$.

На числовой оси обозначим число 2 точкой A:



Затем к числу 2 прибавим положительное число 5. Это значит, что на числовой оси точку A нужно переместить на 5 единиц вправо. Выполнив это действие, мы получаем точку B, координата которой – 7.



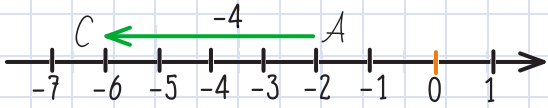
$2 + (+5) = 7$.

Сложение двух отрицательных чисел с помощью числовой оси.

ПРИМЕР

$-2 + (-4)$.

На числовой оси обозначим число -2 точкой A. Чтобы прибавить число -4, нужно сдвинуть точку A на 4 единицы влево. В результате получим точку C с координатой -6.

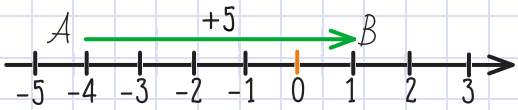


Сложение чисел с разными знаками с помощью числовой оси.

ПРИМЕР

$-4 + 5$.

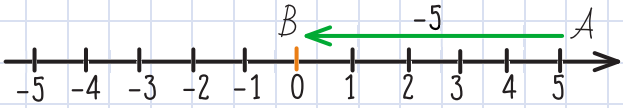
Находим точку A с координатой -4, затем перемещаем точку A на 5 единиц вправо и получаем точку B с координатой 1.



Противоположные числа, как вы уже знаете, это два числа равных по модулю (величине), но имеющие разные знаки. Сложим два противоположных числа с помощью числовой оси.

ПРИМЕР

Сложим два числа: 5 и -5. На числовой оси отметим точку A с координатой 5 и переместим ее влево на 5 единиц (-5). Сумма чисел 5 и -5 равна 0.



Важно!

Сумма двух противоположных чисел равна нулю: $a + (-a) = 0$.

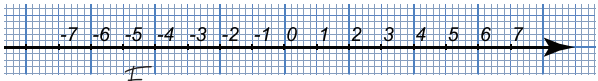
Сложение отрицательных чисел

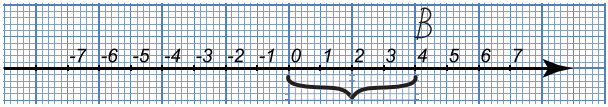
Для выполнения различных действий с отрицательными числами дадим еще одно определение модуля, о котором мы говорили ранее. Для этого определения обратимся к числовой прямой. Модулем числа называется расстояние в единичных отрезках от начала отсчета до точки на числовой прямой, которая соответствует этому числу.

Модуль числа – это расстояние, а так как расстояние не может быть отрицательным числом, то и модуль не может быть отрицательным, и потому модуль отрицательного числа всегда будет равен противоположному ему положительному числу.

Важно!

Внимательно рассмотрим рисунок: координата точки F — это -5. Знак «минус» говорит о том, что точка F находится слева от начала отсчета — точки 0. А число 5 указывает на то, что точка F расположена на расстоянии пяти единичных отрезков от точки 0. Число 5, т. е. длина отрезка OF, является модулем числа -5 и записывается следующим образом: $|-5| = 5$, а прочитать эту фразу нужно так: «модуль числа минус пять равен пяти». Если взять любое число и отметить его как, например, точку B на координатной прямой, то расстояние от точки B до начала отсчета, т. е. длина отрезка OB, и будет модулем числа B: $|B| = OB$.





Чтобы сложить два отрицательных числа, нужно сложить их модули, а перед суммой поставить знак «минус».

Сложение в случае, когда число с большим модулем положительное.

ПРИМЕР

$-9 + 11$.

1. $|-9| = 9$.
2. $11 - 9 = 2$.
3. Так как число с большим модулем положительное, то и в результате будет положительное число:

$-9 + 11 = 11 - 9 = 2$.

Сложение в случае, когда число с большим модулем отрицательное.

ПРИМЕР

$16 + (-30)$.

1. $|-30| = 30$.
2. $30 - 16 = 14$.
3. Так как число с большим модулем отрицательное, то и в результате будет отрицательное число:

$16 + (-30) = -(30 - 16) = -14$.

Важно!

При сложении чисел с разными знаками необходимо выполнить следующие действия:

1. Убрать знак перед отрицательным числом, т. е. выполнить действия с модулями чисел.
2. Из большего модуля вычесть меньший.
3. В результате поставить знак того числа, модуль которого больше.

Вычитание целых положительных чисел

Вычитание – это арифметическое действие, с помощью которого от единиц одного числа отнимают столько единиц, сколько их содержится в другом числе. Вычитание обозначается знаком «–» (минус).

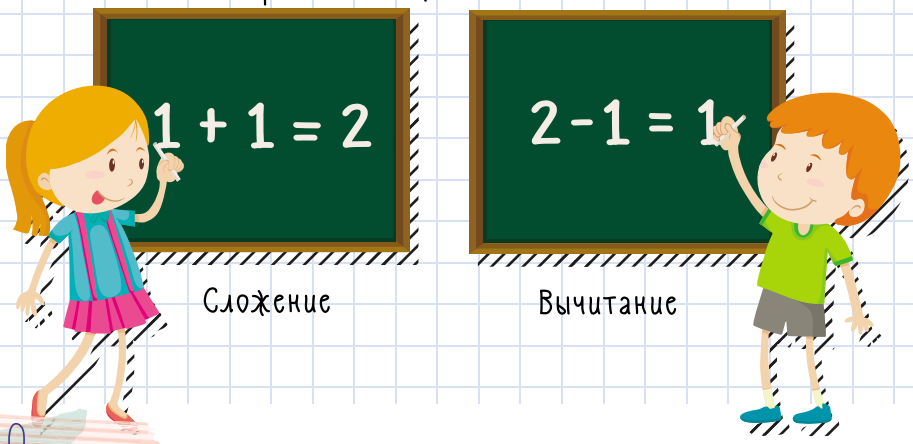
В выражении, где имеются скобки, первым выполняется действие в скобках.

Вычитание – действие, обратное сложению.

Вычитание на множестве целых чисел выполняется всегда, в отличие от деления, которое на множестве целых чисел возможно лишь тогда, когда частное само будет целым числом (неважно, положительным или отрицательным). При этом знак частного определяется по тому же правилу, что и при умножении.

$7 - 1 = 6$

Противоположные действия



Сложение

Вычитание

В буквенном виде записать вычитание можно следующим образом:

$$a - b = c,$$

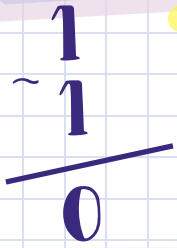
где число a, от которого отнимается другое число, называется **уменьшаемое**, число b, которое отнимают, называется **вычитаемое**, число c, полученное в результате вычитания, называется **разностью** чисел a и b.

Примеры вычитания:

$56 - 23 = 33$,

$112 - 60 = 52$,

$91 - 0 = 91$.



Если из числа вычесть ноль, то оно не изменится, т. е. $a - 0 = a$.

Если из числа вычесть это же число, то получится ноль: $a - a = 0$.

Если вычитаемое и уменьшаемое поменять местами, разность изменится.

ПРИМЕР

$15 - 5 = 10$.

Но: $5 - 10 = -5$.

При последовательном выполнении вычитания трех или более чисел последовательность выполнения операций имеет значение, т. к. разность изменится.

ПРИМЕР

При наличии скобок сначала выполняется действие в скобках:
(10 – 5) – 2 = 5 – 2 = 3.
Но: 10 – (5 – 2) = 10 – 3 = 7.

В выражении, составленном из нескольких вычитаний, при отсутствии скобок действия производятся так: из уменьшаемого вычитаются вычитаемые в любом порядке.

ПРИМЕР

10 – 5 – 2= 5 – 2 = 3.
Или 8 – 5 = 3.

В выражении, составленном из операций вычитания и сложения, не содержащем скобки, есть два правильных способа для решения, причем начинать решение надо с уменьшаемого, из которого необходимо вычесть вычитаемое.

ПРИМЕР

10 – 8 + 15
10 – 8 + 15 = (10 – 8) + 15 = 2 + 15 = 17 Правильный способ
10 – 8 + 15 = 10 + 15 – 8 = 25 – 8 = 17 Правильный способ
10 – 8 + 15 = 10 – 23= – 13 Неправильный способ

В этом выражении, где отсутствуют скобки, складывать 8 и 15 нельзя, потому что 8 – вычитаемое! А вычитаемое можно только вычитать.

1. Вычитание числа из суммы.

$(856 + 183) - 206 = 1039 - 206 = 833.$

В этом примере сначала выполнили сложение, а затем из суммы вычли указанное число. Однако гораздо удобнее считать следующим образом:

$(856 + 183) - 206 = 856 - 206 + 183 = 650 + 183 = 833.$

2. Вычитание суммы из числа.

$486 - (26 + 128) = 486 - 154 = 332,$

но удобнее считать следующим образом, раскрыв скобки:

$486 - (26 + 128) = 486 - 26 - 128 = 460 - 128 = 332.$

Важно!

Разность двух чисел показывает, насколько уменьшаемое больше вычитаемого.

При вычитании числа из суммы это число можно вычесть из любого слагаемого, а к разности прибавить другое слагаемое. При этом вычитаемое должно быть меньше или равно тому слагаемому, из которого его вычитают:

$(a + b) - c = (a - c) + b$, где $c \leq a$

или

$(a + b) - c = (b - c) + a$, где $c \leq b$.

При вычитании суммы из числа из него можно вычесть любое слагаемое, а из разности вычесть другое слагаемое. При этом вычитаемое должно быть меньше или равно тому слагаемому, из которого его вычитают:

$a - (b + c) = (a - b) - c$ или $a - (b + c) = (a - c) - b.$

Решите примеры $10 - 5 + 3$ и $10 - (5 + 3)$. Сравните результаты.

Вычитание отрицательных чисел

Уже известно, что вычитание – это действие, обратное сложению. Иначе говоря, если из одного положительного числа вычесть другое, то получится число, которое в сумме с вычитаемым даст исходное число.

ПРИМЕР

$10 - 7 = 3$ и $3 + 7 = 10$.

Этот пример можно записать и так:

$10 - 7 = 10 + (-7)$.

Это равенство лишь подтверждает тот факт, что вычесть 7 и прибавить -7 означает одно и то же действие.

Например:

$12 - 20 = 12 + (-20) = -8$;

$5{,}6 - 13{,}8 = 5{,}6 + (-13{,}8) = -8{,}2$.

Чтобы из одного числа вычесть другое, нужно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому: $a - b = a + (-b)$.

Чтобы из -25 вычесть 10, нужно к -25 прибавить противоположное число -10 по правилу сложения отрицательных чисел.

Два минуса, идущих подряд, можно заменить знаком «плюс»!

ПРИМЕР 1

Чтобы из 25 вычесть −5, нужно к 25 прибавить противоположное число 5 по правилу сложения.

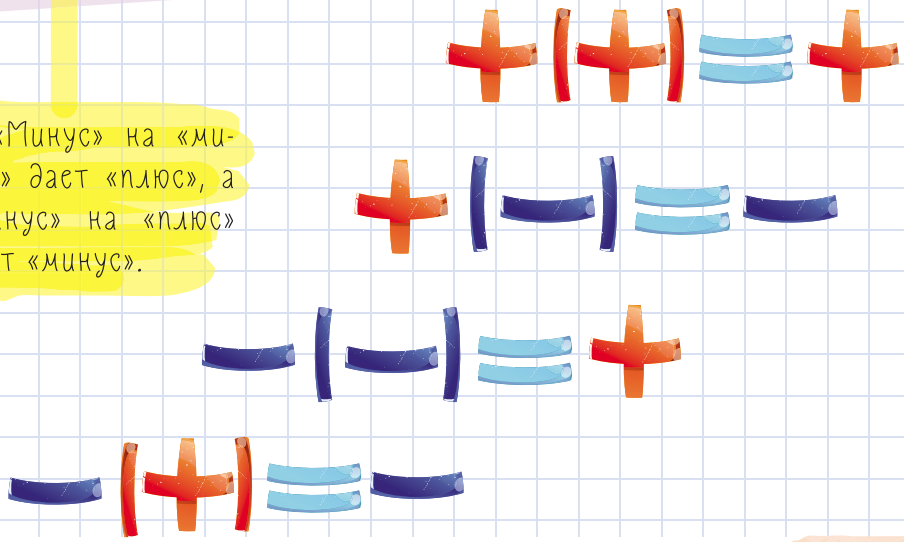
$25 - (-5) = 25 + 5 = 30.$

ПРИМЕР 2

Чтобы из −30 вычесть −17, нужно к −30 прибавить противоположное число 17 по правилу сложения чисел с разными знаками.

$-30 - (-17) = -30 + 17 = -13.$

«Минус» на «минус» дает «плюс», а «минус» на «плюс» дает «минус».



Важно!

Если перед скобками стоит знак «минус», то знак числа в скобках меняется на противоположный:

$-(+a) = -a$;

$-(-a) = +a$.

Это правило применяется и в том случае, если в скобках не одно число, а сумма нескольких чисел:

$a - (-b + d) + (f + m - n) = a + b - d + f + m - n$.

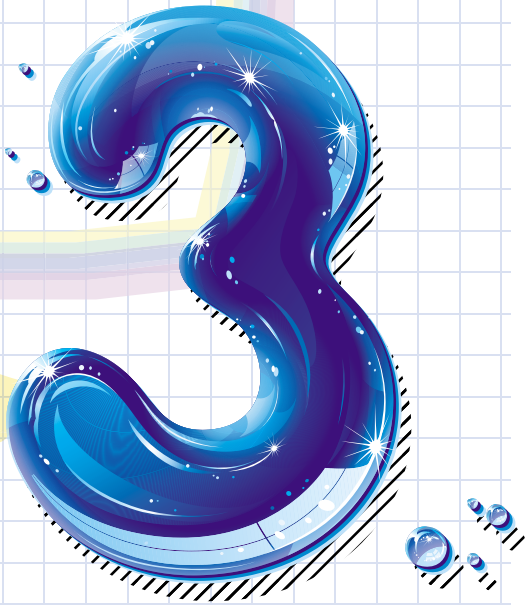
Разностью отрицательных чисел может быть отрицательное число, положительное число или нуль.

ПРИМЕРЫ

$(-17) - (-20) = 3$.

$(-86) - (-63) = -23$.

$(-36) - (-36) = 0$.



Решите примеры:

$-397 - (-298)$;

$-1472 - (-816)$.

Умножение целых чисел

Умножение – это арифметическое действие, в результате которого можно найти сумму одинаковых слагаемых. Если говорить проще, умножить число a на число b означает повторить число a в качестве слагаемого b раз. Например, $a = 7$ и $b = 4$:

$$7 \times 4 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28.$$

При умножении числа a и b называются **множителями**, а результат – **произведением**.

Произведением двух целых чисел называется число, удовлетворяющее следующим условиям:

1) произведение двух **положительных** чисел есть число положительное и находится по правилам, определенным на множестве положительных чисел;

2) произведение двух **отрицательных** чисел есть число положительное;

3) произведение двух чисел, **имеющих разные знаки**, есть число отрицательное. Чтобы найти модуль произведения, надо перемножить модули этих чисел.

Если число множителей со знаком «минус» четное, результат будет положительным, если нечетное – отрицательным.

Например:

$-4 \times (-5) = 20$ (четное число множителей);

$-5 \times (-5) \times (-4) = -100$ (нечетное число множителей).

Важно!

Пользоваться таблицей умножения в виде сетки очень просто. Например, чтобы умножить 4 на 8, необходимо в левом столбце найти число 4, в верхней строке — число 8. Ответ, т. е. произведение этих чисел, нужно искать на пересечении столбца и строки: $4 \times 8 = 32$.

	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	4	6	8	10	12	14	16	18	2
3	6	9	12	15	18	21	24	27	3
4	8	12	16	20	24	28	32	36	4
5	10	15	20	25	30	35	40	45	5
6	12	18	24	30	36	42	48	54	6
7	14	21	28	35	42	49	56	63	7
8	16	24	32	40	48	56	64	72	8
9	18	27	36	45	54	63	72	81	9
	2	3	4	5	6	7	8	9	

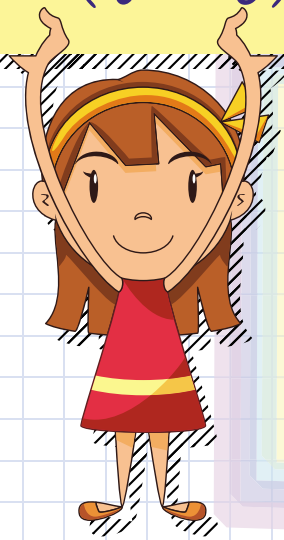
Переместительное свойство умножения: от перестановки мест множителей произведение не меняется.

$$a \times b = b \times a$$

В буквенном выражении это свойство выглядит следующим образом: $a \times b = b \times a$.

Например: $15 \times 8 = 8 \times 15$, $217 \times 13 = 13 \times 217$ и т. д.

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$



Сочетательное свойство умножения: чтобы одно число умножить на **произведение** двух или более чисел, это число можно умножить на первый множитель, а произведение, полученное в результате этого действия, умножить на второй множитель.

В буквенном выражении это свойство выглядит следующим образом: $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

Например: $61 \times (3 \times 8) = (61 \times 3) \times 8$, $47 \times (5 \times 4) = (47 \times 5) \times 4$ и т. д.

Если один из множителей равен нулю, то и произведение равно нулю, т. е. $a \times 0 = 0$, $a \times b \times 0 = 0$.

Например: $48 \times 0 = 0$, $2 \times 0 = 0$, $15 \times 0 = 0$, $16 \times 5 \times \times 0 = 0$ и т. д.

Если один из множителей равен 1, то произведение равно второму множителю, т. е. $a \times 1 = a$.

Например: $73 \times 1 = 73$, $10 \times 1 = 10$, $541 \times 1 = 541$ и т. д.

Распределительное свойство умножения относительно сложения: чтобы умножить число на сумму двух чисел, можно это число умножить на каждое слагаемое и полученные произведения сложить.

ПРИМЕР

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$,

$8 \times (10 + 9) = 8 \times 10 + 8 \times 9$.

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$(a - b) \times c = a \times c - b \times c$$

Распределительное свойство умножения относительно вычитания: чтобы умножить разность на число, можно на это число сначала умножить уменьшаемое, затем вычитаемое, после этого из первого произведения вычесть второе.

ПРИМЕР

$(a - b) \times c = a \times c - b \times c$,

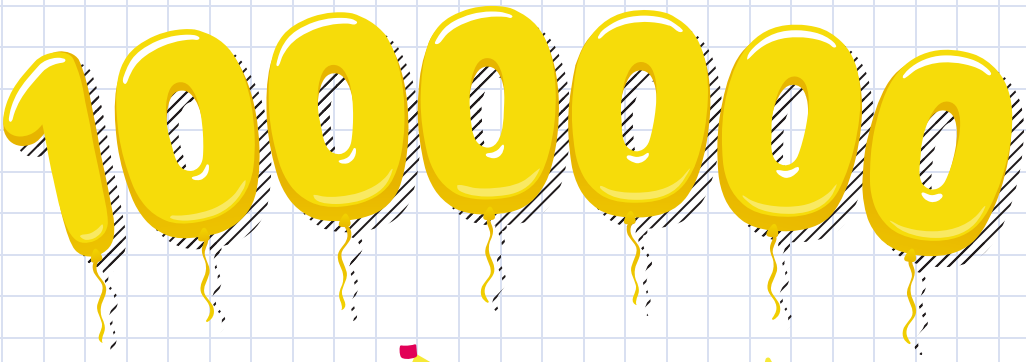
$12 \times (20 - 3) = 12 \times 20 - 12 \times 3$.

Для перемножения не обязательно пользоваться калькулятором, или приложениями на телефоне, или компьютерами. Они не понадобятся, если знать несколько хитростей.

Умножение на 10. Умножая на 10, 100, 1000, 10 000 и т. д., единственное, что нужно сделать, – посчитать количество нулей и дописать их к тому числу, которое умножается.

ПРИМЕР

$8 \times 10 = 80$,
$45 \times 100 = 4500$,
$360 \times 10\,000 = 3\,600\,000$.



Умножение на 11 двузначных чисел, если сумма их цифр меньше 10. При умножении на 11 двузначного числа нужно сложить цифры этого числа. Полученную сумму вписать между первой и второй цифрами этого числа. Это и будет произведение.

ПРИМЕР

$34 \times 11 = 3\,(3 + 4)\,4 = 374.$

Умножение на 11 двузначных чисел, если сумма цифр больше или равна 10. Между цифрами множителя нужно записать количество единиц суммы, а к первой цифре добавить 1.

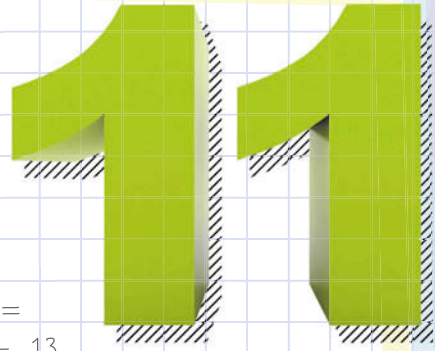
ПРИМЕР

$84 \times 11 = 8\,(8 + 4)\,4 = 924.$

$8 + 4 = 12$, т. е. 2 мы оставляем между цифрами, а 1 добавляем к 8: $8 + 1 = 9$ – и получаем результат 924.

Важно!

Умножать на 11 можно любые многозначные числа: основное правило заключается в последовательном сложении соседних цифр.



Умножим 62 581 на 11. Первую и последнюю цифры запишем без изменений (6 и 1), а между ними – суммы всех цифр, складывать которые нужно слева направо: 6 + 2 = = 8, 2 + 5 = 7, 5 + 8 = 13 (в данном случае число получилось больше 10, т. е. записать нужно единицы суммы, а количество десятков прибавить к предыдущему числу), 8 + 1 = 9.

62 581 × 11 = 6 (6 + 2) (2 + 5) (5 + 8) (8 + 1) 1 = = 688 391.

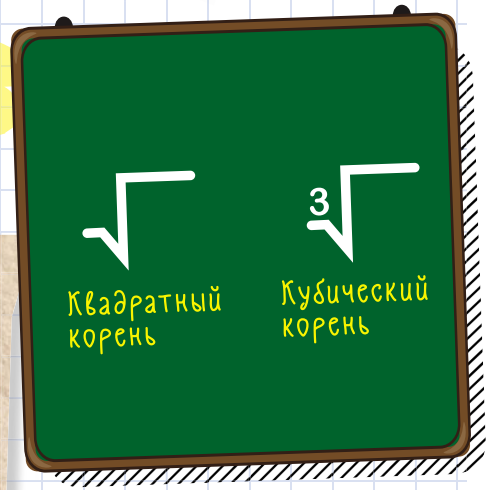
Возведение в степень – это многократное умножение числа на себя. В математике степень обозначается как a^n, где a – основание, n – степень.

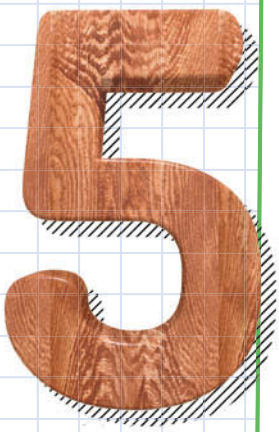
Например: $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

Извлечение корня – действие, обратное возведению в степень.

Например: корень кубический из 8 равен 2, корень квадратный из 9 равен 3.

Возведение в квадрат – это умножение числа на себя. В математике квадрат числа обозначается следующим образом: $6^2 = 6 \times 6 = 36$, $4^2 = 4 \times 4 = 16$ и т. д.





Важно!

При возведении в квадрат чисел, оканчивающихся цифрой 5, произведение всегда оканчивается на 25. Это закономерность, которой можно воспользоваться, чтобы легко перемножать такие числа без калькулятора.

ПРИМЕР

$25 \times 25 = 625$, $35 \times 35 = 1225$, $45 \times 45 = 2025$, $55 \times 55 = 3025$.

Чтобы **умножить 25 на 25**, нужно выполнить следующие действия:

1. Число десятков (2) нужно увеличить на 1 ($2 + 1 = 3$) и умножить количество десятков на получившееся число: $2 \times 3 = 6$.

2. Справа от цифры 6 нужно дописать 25. Полученное число – 625.

Чтобы **умножить 115 на 115**, нужно выполнить следующие действия:

1. 11 увеличиваем на 1 ($11 + 1 = 12$) и умножаем 11 на получившееся число: $11 \times 12 = 132$.

2. Справа от числа 132 дописываем 25 и получаем число 13 225: $115 \times 115 = 13\,225$.

Возведение в квадрат числа с пятью десятками (50, 51, 52, 53 и т. д.).

ПРИМЕР

Нужно возвести в квадрат число 56, где 5 – десятки, 6 – единицы.

1. К числу 25 (оно неизменно при возведении в квадрат любого числа с пятью десятками) нужно добавить 6 (количество единиц): $25 + 6 = 31$.

2. Затем возводим в квадрат число 6: $6 \times 6 = 36$ и дописываем его после 31. В результате: $56^2 = 3136$.

При возведении в квадрат чисел 51, 52, 53 в разряд десятков нужно написать 0, так как при возведении в квадрат чисел 1, 2 и 3 получается однозначное число.

ПРИМЕР

Возведем в квадрат число 52:

1. $25 + 2 = 27$.

2. $2 \times 2 = 4$.

3. Пишем число 27, затем 0 в разряд десятков, а потом 4.

4. Получилось 2704.

Умножение на 9, 99, 999 и т. д. Если число состоит из девяток, то его очень легко умножить на другое число. Для этого к одному множителю нужно приписать справа столько нулей, сколько девяток во втором множителе, затем из получившегося числа вычесть первый множитель.

ПРИМЕР

$192 \times 9 = 1920 - 192 = 1728$,
$35 \times 99 = 3500 - 35 = 3465$.

Умножение на число, близкое к единице какого-либо разряда.

ПРИМЕР

$38 \times 97 = 38 \times (100 - 3) = 38 \times 100 - 38 \times 3 = 3800 - 114 = 3686$,

$44 \times 103 = 44 \times (100 + 3) = 44 \times 100 + 44 \times 3 = 4400 + 132 = 4532$.

Важно!

В результате умножения нуля на число получается нуль: $0 \times a = 0$. *В результате умножения любого числа на 1 получается это же число:* $a \times 1 = a$.

Умножение больших чисел методом решетки можно использовать, не обращаясь к калькулятору. Для этого достаточно только листа бумаги и ручки.

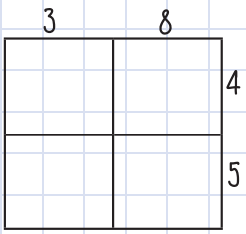


Рис. 1

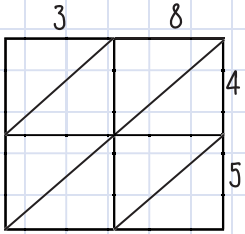


Рис. 2

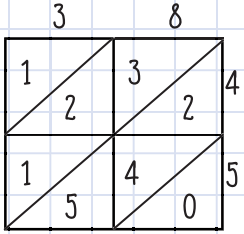


Рис. 3

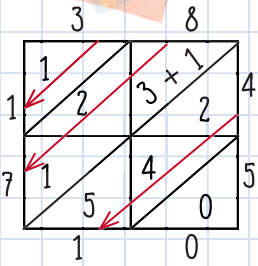


Рис. 4

ПРИМЕР 1

Умножим 38 на 45.

Нарисуйте решетку, разместите цифры и проведите диагонали в каждом квадрате так, как показано **на рисунках 1 и 2.**

Умножьте одну из цифр над решеткой на цифру справа от решетки:

$3 \times 4 = 12$.

Полученное число запишите в квадрат на пересечении цифр 3 и 4: количество десятков (1) над разделяющей чертой, количество единиц (2) – под чертой.

Так же попарно перемножьте остальные цифры:

$8 \times 4 = 32$,

$3 \times 5 = 15$,

$8 \times 5 = 40$.

Эти числа запишите в свободные ячейки решетки, как **на рисунке 3.**

Диагонали делят решетку на четыре части. Чтобы узнать результат умножения, нужно посчитать сумму цифр в каждой части решетки начиная с ее нижнего правого угла – смотрите **рисунок 4.**

В нижнем правом углу стоит цифра 0. Запишите ее в разряд единиц итогового числа.

Количество десятков можно узнать, сложив числа в соседней диагональной части решетки, отмеченной стрелкой:

$2 + 4 + 5 = 11 = 10 + 1$.

Получилось двузначное число, поэтому цифру 1 записываем в разряд десятков итогового числа, а число 10 преобразуется в единицу следующего разряда. Теперь сложим цифры в третьей части решетки, не забыв прибавить единицу, полученную на предыдущем шаге:

$3 + 2 + 1 + (1) = 7$.

Это количество сотен. А в разряд тысяч запишите цифру, стоящую в левом верхнем углу решетки, – 1.

Итог: $38 \times 45 = 1710$.

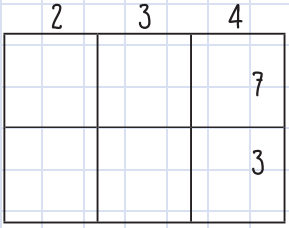


Рис. 1

ПРИМЕР 2

Умножим 234 на 73.

Нарисуйте решетку, разместите цифры и проведите диагонали в каждом квадратике так, как показано на рисунках.

$4 \times 7 = 28$,
$3 \times 7 = 21$,
$2 \times 7 = 14$,
$4 \times 3 = 12$,
$3 \times 3 = 9$,
$2 \times 3 = 6$,
$8 + 1 + 9 = 18 = (10 + 8)$,
$2 + 1 + 1 + 6 = 10$,
$2 + 1 + 4 = 7$,
Итог: $234 \times 73 = 17\,082$.

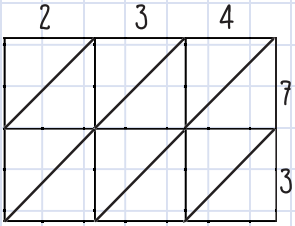


Рис. 2

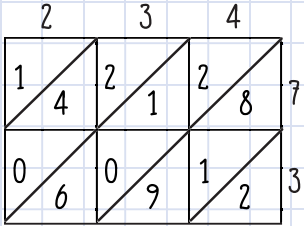


Рис. 3

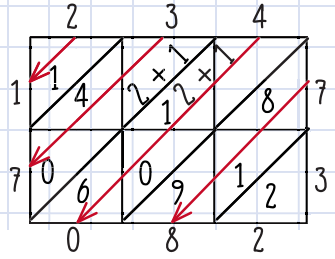


Рис. 4

Важно!

Методом решетки можно умножать любые целые числа.

Рассмотрим некоторые приемы, связанные с **отрицательными** числами.

При умножении двух чисел с разными знаками необходимо выполнить следующие действия:

1. Перемножить модули чисел и записать произведение.

2. Перед результатом поставить знак «–».

Например:

$(-5) \times 5 = -30$;

$36 \times (-11) = -396$.

При умножении на 1 число остается прежним. Запомните, что любое число можно представить в виде произведения этого числа и единицы.

Например:

$9 = 9 \times 1$;

$35 = 35 \times 1$.

При умножении на –1 число меняется на противоположное. Любое отрицательное число можно представить в виде произведения модуля этого числа и –1.

Например: $-3 = 3 \times (-1)$.

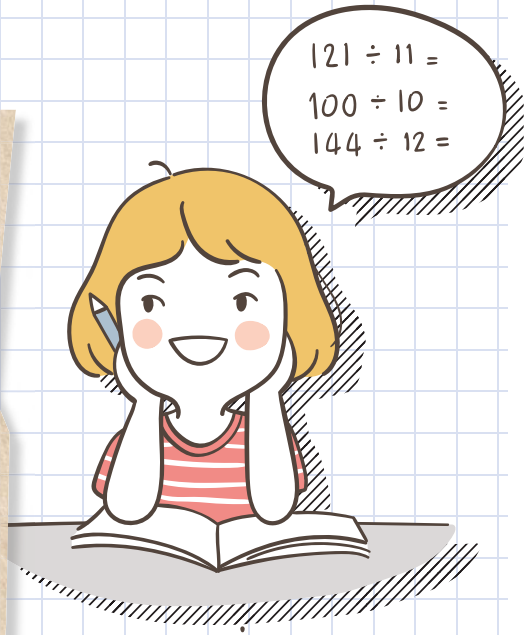
Деление целых чисел. Признаки делимости

Деление чисел – это действие, обратное умножению, в результате которого можно узнать, сколько раз одно число содержится в другом. Деление обозначается символами «:», «/» и «÷» и записывается так:

$$a : b = c,$$

где a – **делимое**, b – **делитель**, c – **частное**.

Например: $20 : 4 = 5$.



Частное показывает, во сколько раз число, которое делят (делимое), больше числа, на которое делят (делителя).

Важно!

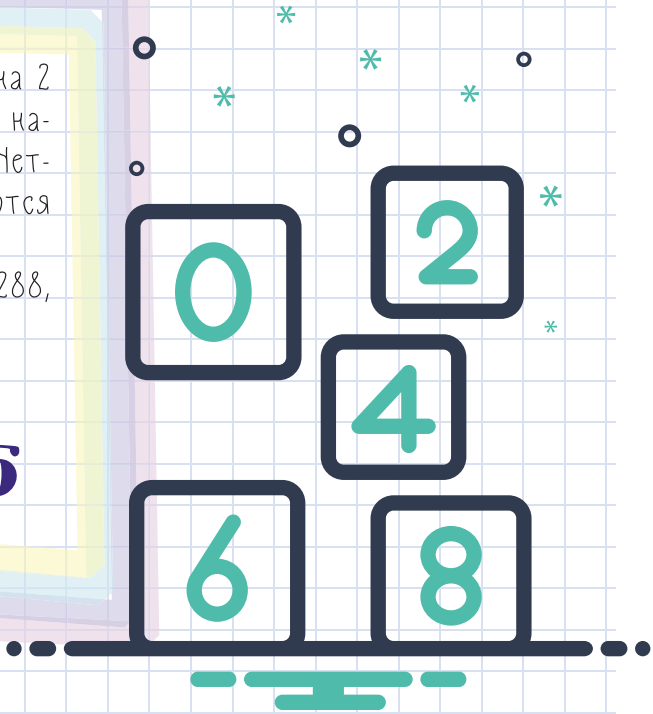
В результате деления нуля на число получается нуль: $0 : a = 0$, **при этом деление на нуль не имеет смысла. В результате деления любого числа на 1 получается это же число:** $a : 1 = a$.

На нуль делить нельзя.

Если число делится на 2 без остатка, это число называется **четным**. Четные числа заканчиваются цифрами 0, 2, 4, 6, 8.

Например: 14, 156, 288, 4000, 5642.

$10 : 2 = 5$



Нечётные числа на 2 без остатка не делятся и заканчиваются цифрами 1, 3, 5, 7, 9.

Например: 7, 19, 153, 275, 8051.

Если сумма двух чисел является четным числом, то и их разность – **чётное** число.

Например: 8 + 6 = 14 (четное), 8 - 6 = 2 (четное).

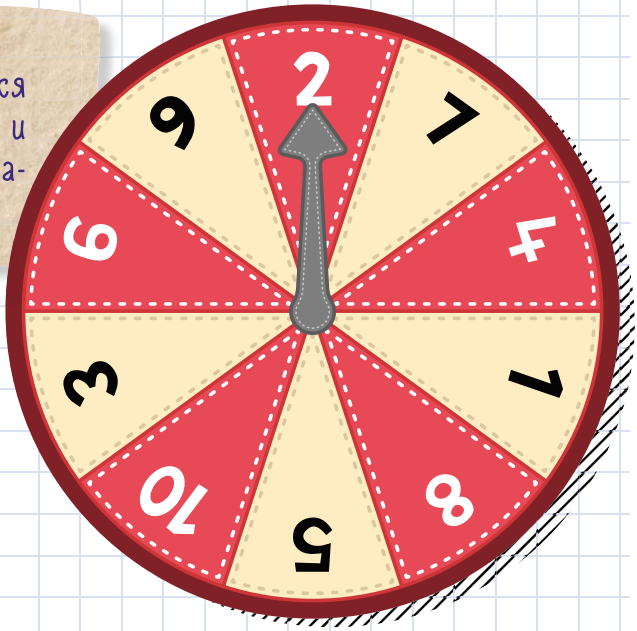
Если сумма двух чисел является нечетным числом, то и их разность – **нечётное** число.

Например: 5 + 4 = 9 (нечетное), 5 - 4 = 1 (нечетное).

8 : 2 = 4

Если число делится без остатка только на 1 и на самого себя, оно называется **простым**.

1 простым числом не считается.



Это интересно

Число 2 одновременно является и четным, и простым.

Важно!

Любое число, большее 1, либо является простым, либо может быть выражено как произведение простых чисел, например $18 = 3 \times 3 \times 2$.

Это интересно

В большинстве случаев, чтобы понять, делится ли одно число на другое без остатка или нет, не обязательно брать в руки калькулятор и начинать вычисления. Оказывается, для этого достаточно знать несколько математических правил, которые нужно просто запомнить.

Важно!

Признаки делимости на 2, 4 и 8 считаются по последней цифре (цифрам).

Если последняя цифра числа **делится на 2** или является нулем, то и все число делится на 2.

ПРИМЕРЫ

1. 82 можно разделить на 2, так как последняя цифра этого числа делится на 2 без остатка (2 : 2 = 1).

2. 120 можно разделить на 2 без остатка, так как последняя цифра этого числа – 0.

3. 987 нельзя разделить на 2, так как последняя цифра этого числа не делится на 2 без остатка.

Если две последние цифры числа являются нулями или образуют число, которое **делится на 4**, то и все число делится на 4 без остатка.

ПРИМЕРЫ

1. 356 можно разделить на 4, так как две последние цифры этого числа (56) делятся на 4 без остатка (56 : 4 = 14).
2. 1400 можно разделить на 4 без остатка, так как две последние цифры этого числа – нули (00).
3. 583 нельзя разделить на 4, так как две последние цифры этого числа (83) не делятся на 4 без остатка.

Если три последние цифры числа являются нулями или образуют число, которое **делится на 8**, то и все число делится на 8 без остатка.

ПРИМЕРЫ

1. 13 208 можно разделить на 8, так как три последние цифры этого числа (208) делятся на 8 без остатка (208 : 8 = 26).
2. 17 000 можно разделить на 8 без остатка, так как три последние цифры этого числа – нули (000).
3. 8561 нельзя разделить на 8, так как три последние цифры этого числа (561) не делятся на 8 без остатка.

Важно!

Признаки делимости на 5, 10 и 25 считаются по последней цифре (цифрам).

Если последняя цифра числа – 5 или 0, то число **делится на 5**.

ПРИМЕРЫ

1. 415 можно разделить на 5, так как последняя цифра этого числа – 5.
2. 210 можно разделить на 5 без остатка, так как последняя цифра этого числа – 0.
3. 854 нельзя разделить на 5, так как последняя цифра этого числа – 4.

Если последняя цифра числа – 0, то это число **делится на 10** без остатка.

ПРИМЕРЫ

1. 250 можно разделить на 10, так как последняя цифра этого числа – 0.
2. 763 нельзя разделить на 10, так как последняя цифра этого числа – 3.

На 100, 1000, 10 000 и т. д. **делятся** без остатка только те числа, последние цифры которых – два, три, четыре и т. д. нулей соответственно.

Например: 69 000 : 100 = 690, 81 000 : 1000 = 81.

Если две последние цифры числа являются нулями (00) или образуют число, которое **делится на 25**, то и все число делится на 25.

ПРИМЕРЫ

1. 575 можно разделить на 25, так как две последние цифры этого числа образуют число, которое делится на 25 без остатка (75 : 25 = 3).

2. 800 можно разделить на 25, так как две последние цифры этого числа – 00.

Важно!

Основным признаком делимости на 3, 6 и 9 является определенная сумма цифр числа.

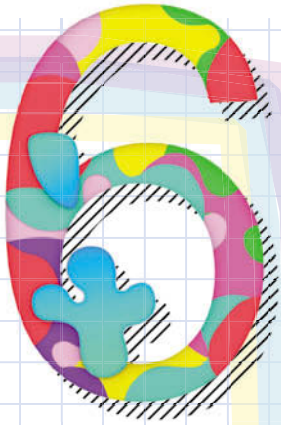
Число можно **разделить на 3** без остатка, если сумма всех его цифр делится на 3.

ПРИМЕРЫ

1. Число 258 можно разделить на 3, так как сумма всех его цифр (2 + 5 + 8 = 15) делится на 3 (15 : 3 = 5).

2. Число 6300 делится на 3, так как сумма всех его цифр (6 + 3 + 0 + 0 = 9) делится на 3 (9 : 3 = 3).

3. Число 17 не делится на 3, так как сумма всех его цифр (1 + 7 = 8) не делится на 3 без остатка.



Число можно **разделить на 6** без остатка, если это число делится на 2 и на 3.

ПРИМЕРЫ

1. 336 делится на 6, поскольку делится на 2, так как последняя цифра делится на 2 (6 : 2 = 4), и на 3, так как сумма всех трех цифр делится на 3 (3 + 3 + 6 = 12, 12 : 3 = 4).

2. 351 не делится на 6, так как его последняя цифра не делится на 2 без остатка.

Число можно **разделить на 9** без остатка, если сумма всех его цифр делится на 9.

ПРИМЕРЫ

1. Число 153 можно разделить на 9, так как сумма всех его цифр (1 + 5 + 3 = 9) делится на 9 (9 : 9 = 1).

2. Число 8100 делится на 9, так как сумма всех его цифр (8 + 1 + 0 + 0 = 9) делится на 9 (9 : 9 = 1).

3. Число 25 не делится не 9, так как сумма всех его цифр (2 + 5 = 7) не делится на 9 без остатка.

При делении двух отрицательных чисел частное – число положительное:

$$(-a) : (-b) = c.$$

При делении двух чисел с разными знаками частное – число отрицательное:

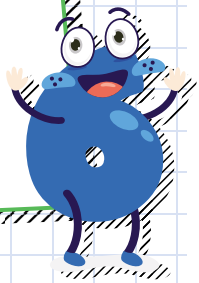
$$(-a) : b = -c,$$
$$a : (-b) = -c.$$

Как и при умножении, в результате деления двух чисел с разными знаками частное получается отрицательным, а при делении двух чисел с одинаковыми знаками – положительным.

Важно!

Обратите внимание на расстановку знаков при делении чисел:

$-8 : (-2) = 4$, **т. к.** $4 \times (-2) = -8$;
$-21 : 3 = -7$, **т. к.** $-7 \times 3 = -21$;
$10 : (-5) = -2$, **т. к.** $-2 \times (-5) = 10$.

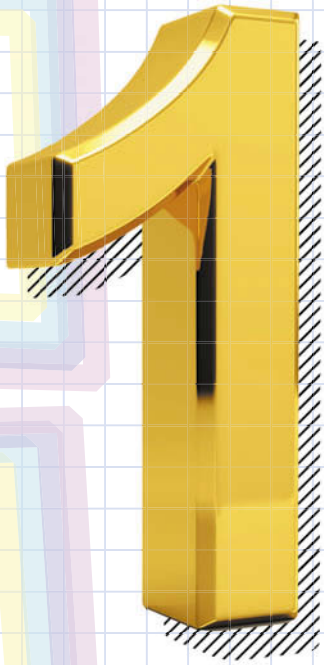


При **делении на 1** число остается прежним.

Например:

$-9 : 1 = -9$;

$-65 : 1 = -65$.



При **делении на –1** число меняется на противоположное.

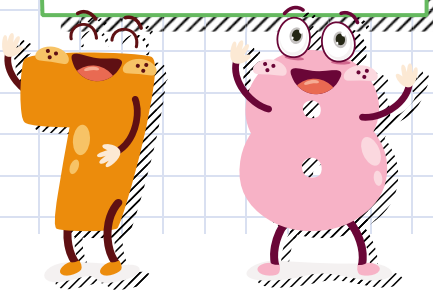
Например: $5 : (-1) = -5$.

Важно!

$-a : 1 = -a$,

$-a : (-1) = a$,

$a : (-1) = -a$.



Решите примеры устно:

$-628 : 314$;

$-1600 : (-250)$;

$876 : (-219)$.

Среднее арифметическое

Среднее арифметическое нескольких чисел – это число, которое получается в результате деления суммы этих чисел на количество слагаемых в этой сумме.

Среднее арифметическое чисел a, b, c и d равно:

$$\frac{a + b + c + d}{4},$$

где $a + b + c + d$ – сумма всех слагаемых, 4 – количество слагаемых.

Как найти среднее арифметическое следующих чисел: 6, 8, 10, 12, 14?

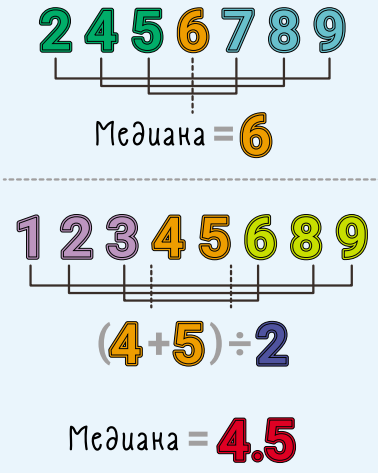
Нужно найти сумму всех этих чисел ($6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 50$) и разделить ее на количество слагаемых ($50 : 5 = 10$). Среднее арифметическое равно 10.

Используя среднее арифметическое, можно рассчитать среднюю скорость движения автобуса, температуру воздуха в течение нескольких дней, средний рост или возраст.

Например: каждый день в зависимости от обстоятельств школьник тратит разное время на дорогу в школу: в понедельник – 28 минут, во вторник – 22 минуты, в среду – 20, в четверг – 24, а в пятницу – 30. Рассчитав среднее арифметическое ((28 + 22 + 21 + 24 + + 30) : 5 = 25), можно узнать, что в среднем школьнику нужно 25 минут, чтобы добраться до школы.

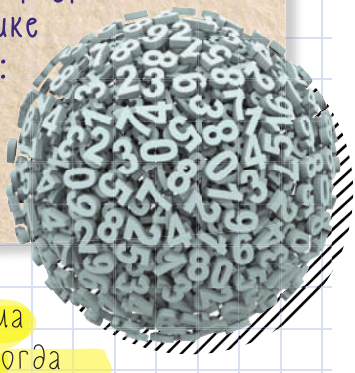
Это интересно

Есть и другие виды средних величин, например мода и медиана. Мода — это число, которое чаще всего повторяется в данном ряду чисел, а медиана — число в ряду, где равное количество чисел больше нее и равное количество — меньше. Мода и медиана будут отличаться от среднего арифметического в одном ряду чисел.



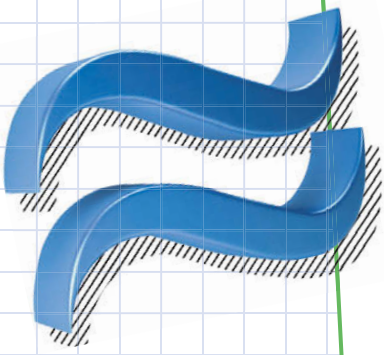
Округление целых чисел

Округление – замена числа на его приближенное значение, которое записывается с меньшим количеством значащих цифр. Целые числа принято округлять до разряда десятков, сотен, тысяч и т. д. На практике округление выглядит следующим образом: в том разряде, до которого мы округляем, и во всех предыдущих цифры меняем на нули.



Модуль разности между заменяемым и заменяющим числом – ошибка округления.

Округляют числа в том случае, когда точность невозможна или в ней нет необходимости.



Важно!

После округления мы получаем приблизительное число, поэтому и привычный знак равенства в этом случае записать нельзя. Для таких случаев есть специальный знак «≈», который так и называется — «приблизительно равно».

Если число необходимо округлить до десятков, то в разряде единиц цифра заменяется нулем.

Например: 32 ≈ 30.

Если число округляется до сотен, то в разряде единиц и разряде десятков цифры заменяются нулями.

Например: 122 ≈ 100.

Если число округляется до тысяч, то в разряде единиц, десятков и сотен цифры заменяются нулями.

Например: 6321 ≈ 6000.

Важно!

Существуют правила округления чисел до определенного разряда.

1. Определите разряд, до которого нужно округлить число, и подчеркните эту цифру.
2. Выделите все цифры, которые стоят справа от этого разряда, маркером или чертой.
3. Если справа от подчеркнутой цифры стоит 0, 1, 2, 3 или 4, то все выделенные символы, стоящие справа от цифры округляемого разряда, заменяем нулями, при этом сама цифра разряда, до которого мы округляем, остается без изменений.
4. Если справа от разряда, до которого мы округляем, стоит 5, 6, 7, 8 или 9, то все выделенные цифры заменяем нулями, а сама цифра разряда, до которого мы округляем, увеличивается на 1.

Необходимо округлить число 87 643 до тысяч.

1. 87̲ 643 – подчеркиваем цифру, до которой нужно округлить.

2. 87 643 или 87/643 – выделяем маркером или проводим черту.

3. Округляем: 87 643 ≈ 88 000. Так как после цифры разряда стоит 6, то саму цифру разряда увеличиваем на 1 (7 + 1 = 8), а остальные символы справа от черты заменяем нулями.

Необходимо округлить число 548 236 до сотен.

1. 548 2̲36 – подчеркиваем цифру, до которой нужно округлить.

2. 548 236 или 548 2/36 – выделяем маркером или проводим черту.

3. Округляем: 548 236 ≈ 548 200. Так как после цифры разряда стоит 3, то саму цифру разряда оставляем без изменений, а остальные символы справа от черты заменяем нулями.

Важно!

Умение округлять помогает в бытовых вопросах. Если у вас с собой немного наличных денег или небольшая сумма на карточке, а вы зашли в магазин и хотите купить несколько товаров, достаточно будет подсчитать их округленную общую стоимость, чтобы прикинуть, хватит ли вам денег. Это можно сделать быстро в уме, не обращаясь к гаджетам.

Пример устного округления цен на несколько товаров 515 + 123 + 489 + 277 + 103 можно решить по крайней мере двумя способами.

СПОСОБ 1

Для ускорения счета все числа можно округлить до сотен:

500 + 100 + 500 + 300 + 100 = = 1500.

То есть можно сказать, что 515 + 123 + 489 + 277 + 103 ≈ ≈ 1500.

Какова же точная сумма этих слагаемых?

515 + 123 + 489 + 277 + 103 = = 1507.

Точная сумма получилась все же больше, чем округленная до сотен. Если вы хотите получить более близкий к точному округленный результат, можете округлить до десятков.

СПОСОБ 2

515 + 123 + 489 + 277 + 103 ≈ ≈ 520 + 120 + 490 + 280 + 100 = = 1510.

Проверьте себя и запишите ответ:

1. Какое действие нужно проделать, чтобы найти модуль суммы?

2. Может ли модуль быть отрицательным? Ответьте на вопрос и объясните, почему.

3. Решите примеры: $(26 - 7) - 3$; $26 - (7 - 3)$.

4. Решите примеры: $18 - 5 - 2$; $18 - 5 + 2$.

5. Каким будет произведение чисел $5 \times (-4) \times (-8)$: отрицательным или положительным? Запишите ответ и объясните его.

6. Каким будет произведение чисел $-5 \times (-2) \times 4$: отрицательным или положительным? Запишите ответ и объясните его.

7. Назовите общее правило возведения в квадрат числа, оканчивающегося на 5.

8. Возведите в квадрат числа 15, 255, 65. Воспользуйтесь правилом, изложенном в этой книге. Запишите решения.

9. Какое действие является обратным возведению в степень?

10. Назовите признак делимости на 5.

11. Назовите признак делимости на 25.

12. Назовите признак делимости на 4.

13. Назовите признак делимости на 100, 1000, 10 000.

14. Найдите среднее арифметическое для чисел 798, 387, 856, 902, 814, 674.

15. Округлите до сотен числа 697, 833, 925, 578, 430, 235, 251.

16. Округлите до десятков числа 876, 915, 394, 814, 815, 395.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

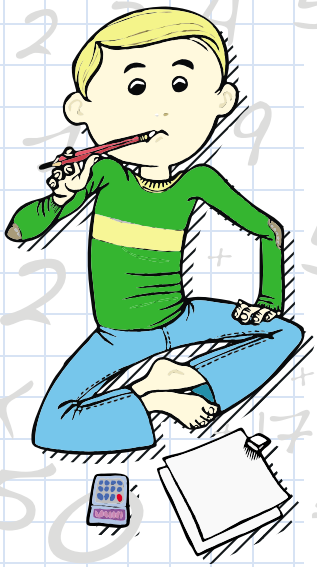
12.

13.

14.

15.

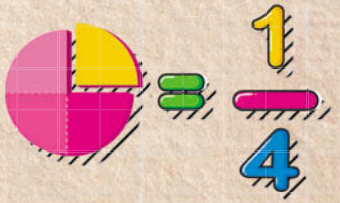
16.



Дроби

Обыкновенные дроби

В повседневной жизни нам приходится сталкиваться не только с целыми числами, но и с их частями, или долями. Вам наверняка доводилось слышать, а может быть, и использовать в своей речи следующие слова: «треть, четверть, две третьих и т. д.». Такие числа означают не что иное, как части целого, и являются дробями. Необходимость в дробях у людей возникла уже очень давно. Обстоятельства, когда делилась добыча, состоящая из нескольких убитых животных, при условии, что их число не соответствовало количеству участников охоты, могли привести древних людей к понятию о дробных числах.



Дробь – это число, которое состоит из одной или нескольких равных частей единицы. По способу записи дроби разделяются на следующие: **обыкновенные** и **десятичные**. Обыкновенные дроби входят в множество рациональных чисел.

Представим, что человек заказал пиццу в кафе. Когда принесли заказ, пицца уже была нарезана на 8 частей. А теперь рассмотрим ее с точки зрения математики. Итак, целую пиццу можно считать равной единице, а когда ее разрезают на восемь частей, это означает, что каждый кусочек составляет одну восьмую часть пиццы. Эта дробь записывается следующим образом: $\frac{1}{8}$ (одна восьмая). Это пример **обыкновенной дроби**.

Обыкновенная дробь – это запись числа в виде $\frac{1}{6}$ или 1/6. Линия между числами, написанными сверху и снизу, называется **дробной чертой**. Косая черта так же, как и горизонтальная, является дробной чертой: $\frac{1}{6}$ = 1/6. Число, которое находится над чертой – это **числитель** дроби, под чертой – **знаменатель**.

В обыкновенной дроби числитель является целым числом, а знаменатель – натуральным. Знаменатель указывает, на сколько равных частей разделено целое, а числитель – сколько таких частей взяли у целого.

$\frac{12}{7}$ неправильная дробь

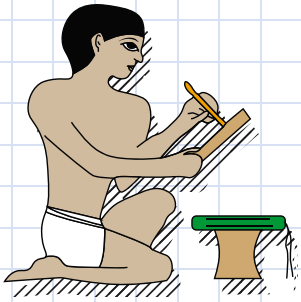
правильная дробь $\frac{8}{9}$

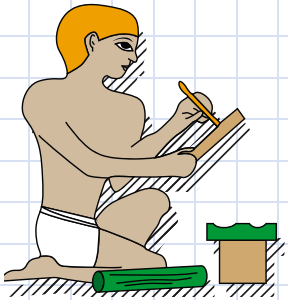
Дробь, в которой числитель меньше знаменателя, называется **правильной**, а дробь, в которой числитель больше знаменателя или равен ему, называется **неправильной**.

Примеры обыкновенных дробей:
$\frac{4}{9}, \frac{5}{8}, \frac{3}{6}, \frac{1}{7}$.

Важно!

Некоторые обыкновенные дроби называются особым образом. Эти названия нужно знать наизусть. Например, одна вторая (обыкновенная дробь) называется половина, одна третья (обыкновенная дробь) — треть, одна четвертая (обыкновенная дробь) — четверть.





Это интересно

Древние египтяне все дроби пытались записать как суммы долей, т. е. дробей вида $\frac{1}{n}$.

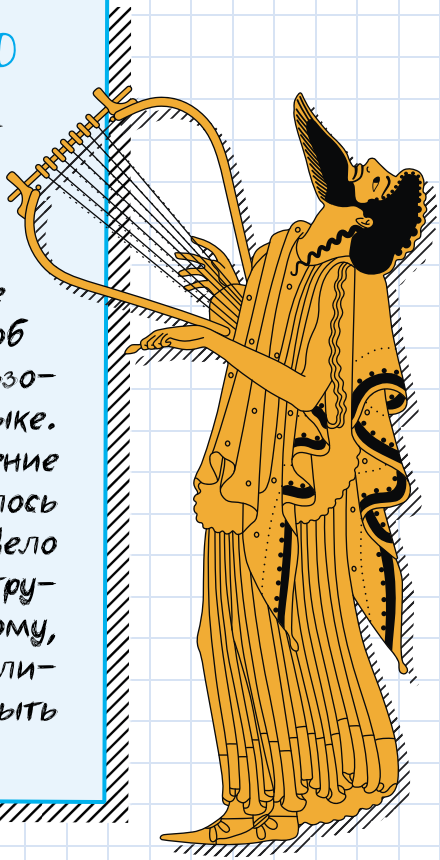
На примере это выглядело так: дробь $\frac{8}{15}$ записывалась как $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$.

Важно!

Обыкновенные дроби связаны с единицами измерения. Например, в 1 кг содержится 1000 г. Что это означает? 1 кг разделен на 1000 равных частей — 1000 г, поэтому можно сказать, что 1 г $= \frac{1}{1000}$ кг, или одной тысячной килограмма.

Это интересно

Древнегреческие ученые считали, что математика должна заниматься целыми числами, поэтому в греческих математических сочинениях дробей не встречалось. Однако учение об отношениях и дробях использовалось в древнегреческой музыке. Музыкой греки называли учение о гармонии, которое опиралось на пропорции и отношении. Дело в том что у музыкальных инструментов несколько струн, поэтому, чтобы звук был гармоничен, длины звучащих частей должны быть в определенном соотношении.

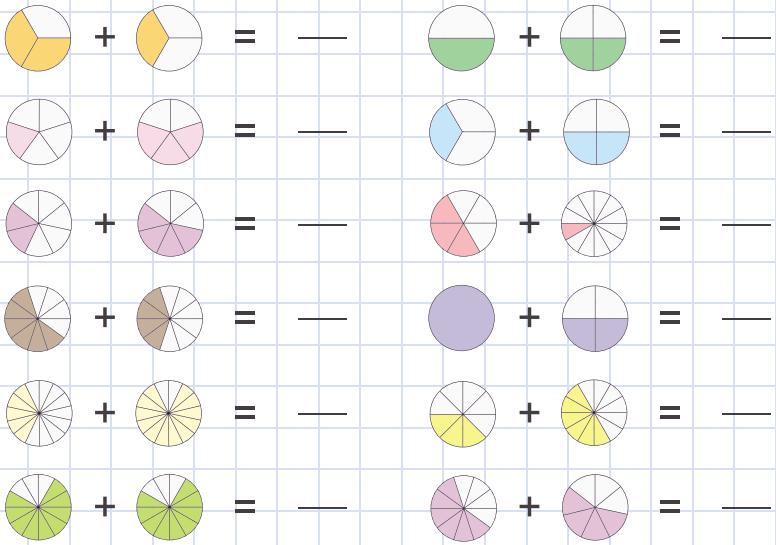


Приводить дроби к общему знаменателю нужно, чтобы выполнять следующие действия:

1. Сравнивать дроби. Без труда можно сравнить целые числа, а с дробями дело обстоит несколько сложнее. Поэтому чтобы узнать, какая из дробей меньше, а какая больше, их нужно привести к общему знаменателю. Вряд ли вы сразу сможете сказать, что больше: $\frac{5}{6}$ или $\frac{3}{4}$.

2. Складывать и вычитать дроби. Приведение к одному знаменателю существенно упрощает поставленную задачу.

3. Решать задачи на проценты (об этом вы узнаете позже).



Самый распространенный способ приведения дробей к общему знаменателю заключается в нахождении их наименьшего общего кратного, которое и будет являться их наименьшим общим знаменателем.

Наименьшее общее кратное двух чисел – это наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из этих чисел без остатка.

Приведем пример приведения дроби к общему знаменателю. Возьмем дроби $\frac{5}{6}$ и $\frac{1}{4}$.

1. Необходимо найти наименьшее общее кратное (оно же и наименьший знаменатель) чисел 6 и 4 – это число 12 (12 : 6 = 2, 12 : 4 = 3).

2. Для каждой дроби нужно найти дополнительный множитель.

Дополнительный множитель для дроби $\frac{5}{6}$ = 12 : 6 = 2.

Дополнительный множитель для дроби $\frac{1}{4}$ = 12 : 4 = 3.

3. Теперь необходимо умножить числитель и знаменатель каждой дроби на ее дополнительный множитель:

$$\frac{5}{6} \times \frac{2}{2} = \frac{10}{12}, \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{12}.$$

Таким образом мы получили две дроби с общим знаменателем: $\frac{10}{12}$ и $\frac{3}{12}$.

Важно!

Основное свойство дроби, которое нужно запомнить: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на любое число, которое не является нулем, то в результате получится равная ей дробь.

Например: $\frac{2}{4} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{8}$.

Приведите к общему знаменателю дроби $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{3}$.

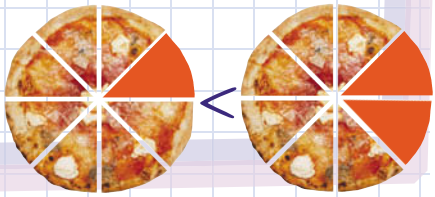
Всем известно, что десять больше, чем пять (10 > 5), а сто меньше, чем сто пятьдесят (100 < 150), при этом не имеет значения, что именно мы сравниваем. Это могут быть орехи, яблоки, книги, конфеты, дома и т. д., т. е. все что угодно, главное, чтобы предметы были одинаковыми.

Важно!

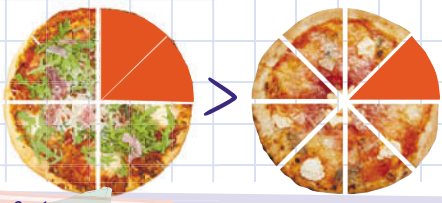
Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой больше числитель.

Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой меньше знаменатель.

Сравнение обыкновенных дробей с разными числителями и одинаковыми знаменателями. Посмотрим внимательно на эти дроби: $\frac{1}{8}$ и $\frac{2}{8}$. У этих дробей одинаковые знаменатели, что означает, что предметы разделены на одинаковое количество частей. И в этом случае меньше та дробь, у которой меньше числитель: 1 < 2, значит, и $\frac{1}{8} < \frac{2}{8}$.



Сравнение обыкновенных дробей с одинаковыми числителями и разными знаменателями. Пусть одна пицца разрезана на 4 части, а вторая – на 8. Больший кусок вам достанется тогда, когда пицца разрезана на 4 части, т. е. $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$.



Чтобы **сравнить обыкновенные дроби с разными числителями и знаменателями**, их чаще всего приводят к одинаковому знаменателю.

ПРИМЕР

Сравним дроби $\frac{4}{7}$ и $\frac{3}{9}$.

1. В нашем случае для знаменателей дробей наименьшим общим кратным будет число 63.

2. Находим дополнительный множитель для каждой дроби: $63 : 7 = 9$ (для дроби $\frac{4}{7}$) и $63 : 9 = 7$ (для дроби $\frac{3}{9}$).

3. Числитель и знаменатель каждой дроби умножаем на ее дополнительный множитель:

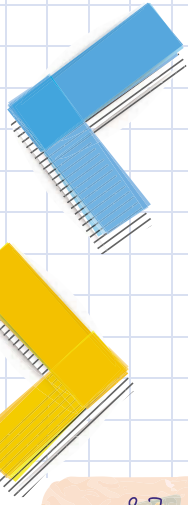
$$\frac{4}{7} \times \frac{9}{9} = \frac{36}{63}, \quad \frac{3}{9} \times \frac{7}{7} = \frac{21}{63}.$$

4. Дроби приведены к общему знаменателю, и сейчас можно сравнивать числители: $36 > 21$ $\left(\frac{36}{63} > \frac{21}{63}\right)$, значит, и $\frac{4}{7} > \frac{3}{9}$.

Важно!

Маленький секрет: если нужно сравнить правильную и неправильную дроби, то любая неправильная дробь всегда будет больше любой правильной. Этому правилу есть простое объяснение: любая правильная дробь всегда меньше единицы, а неправильная — всегда больше единицы или равна ей.

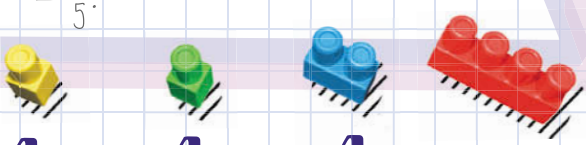
Например: $\frac{12}{7} > \frac{8}{9}$.



Сложение дробей

Сложение дробей с одинаковыми знаменателями – самый простой случай. Если у дробей одинаковые знаменатели, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить прежним.

Например: $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$.



$$\frac{1}{8} + \frac{9}{12} = \frac{3+18}{24} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

Чтобы **сложить дроби с разными знаменателями**, нужно привести эти дроби к наименьшему общему знаменателю.

Например: $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$.

1. Находим наименьшее общее кратное обоих знаменателей. Наименьшим общим кратным чисел 4 и 5 является 20.

2. Находим дополнительный множитель для каждой дроби: 20 : 5 = 4 и 20 : 4 = 5, т. е. дополнительный множитель дроби $\frac{2}{5}$ равен 4, а дроби $\frac{1}{4}$ – 5.

3. Числитель и знаменатель каждой дроби умножаем на соответствующий дополнительный множитель:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{2 \times 4}{5 \times 4} + \frac{1 \times 5}{4 \times 5} = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{13}{20}.$$

Для сложения смешанных чисел необходимо применить сочетательное и переместительное свойства сложения, т. е. сначала сложить целые части, а затем – дробные.

ПРИМЕР

$2\frac{2}{7} + 5\frac{4}{9}$.

1. В данном примере у дробных частей разные знаменатели, поэтому находим их наименьшее общее кратное и дополнительные множители для каждой дроби соответственно. Наименьшее общее кратное – 63, дополнительные множители: 9 – для первой дроби, 7 – для второй.

3. Числитель и знаменатель каждой дроби умножаем на соответствующий дополнительный множитель:

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{9} = \frac{2 \times 9}{7 \times 9} + \frac{4 \times 7}{9 \times 7} = \frac{18}{63} + \frac{28}{63} = \frac{46}{63}.$$

4. Складываем целые и дробные части: $7 + \frac{46}{63} = 7\frac{46}{63}$.

Важно!

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}.$$

Сложите смешанные числа $5\frac{3}{8} + 9\frac{5}{9}$.

Чтобы **сложить смешанное число и натуральное число**, прибавьте к целой части смешанного числа данное натуральное число, а дробную часть оставьте без изменений.

Чтобы **сложить смешанное число и правильную дробь**, прибавьте к данной дроби дробную часть данного смешанного числа и затем добавьте целую часть смешанного числа.

Вычитание дробей

Основное правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями заключается в следующем: от числителя одной дроби отнимают числитель второй дроби, при этом знаменатель остается прежним.

$$\frac{4}{7} - \frac{3}{10} = \frac{40 - 21}{70} = \frac{19}{70}$$

ПРИМЕР

$$\frac{7}{9} - \frac{3}{9} = \frac{7-3}{9} = \frac{4}{9}.$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Бывают случаи, когда из единицы нужно вычесть ее часть, правильную дробь. Для этого единицу необходимо представить в виде неправильной дроби, где числитель и знаменатель равны знаменателю вычитаемой дроби.

ПРИМЕР

$$1 - \frac{3}{5}.$$

В данном примере знаменатель вычитаемой дроби равен 5, значит, единицу необходимо представить в виде неправильной дроби со знаменателем, равным 5 $\left(\frac{5}{5}\right)$, и выполнить действия согласно правилу вычитания дробей с одинаковыми знаменателями:

$$1 - \frac{3}{5} = \frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{5-3}{5} = \frac{2}{5}.$$

Вычитание правильной дроби из целого числа сводится к следующему: это целое число нужно представить в виде смешанного.

ПРИМЕР

$4 - \frac{5}{9}$.

1. В данном случае число 4 нужно представить в виде смешанного числа. Для этого вычитаем одну единицу от 4 и записываем ее в виде неправильной дроби со знаменателем, равным знаменателю вычитаемой дроби: $4 = 3 + \frac{9}{9}$.

2. Далее вычитаем согласно общему правилу вычитания дробей с одинаковыми знаменателями:

$$4 - \frac{5}{9} = 3 + \frac{9}{9} - \frac{5}{9} = 3 + \frac{9 - 5}{9} = 3\frac{4}{9}.$$

Чтобы **из дроби вычесть целое число**, надо также представить целое число в виде смешанного. В случае правильной дроби результат будет отрицательным, так как правильная дробь всегда меньше единицы.

Общее правило вычитания смешанных чисел сводится к следующему: дробные части как уменьшаемого, так и вычитаемого нужно привести к общему знаменателю.

При вычитании смешанных чисел с одинаковыми знаменателями из одной целой части нужно вычесть другую целую часть, а из дробной – дробную:

$$7\frac{7}{15} - 4\frac{3}{15} = (7 - 4) + \left(\frac{7}{15} - \frac{3}{15}\right) = 3\frac{4}{15}.$$

При вычитании смешанных чисел с разными знаменателями дробные части необходимо привести к одному знаменателю, затем из одной целой части вычесть другую целую часть, а из дробной – дробную:

$$9\frac{7}{8} - 3\frac{2}{3} = (9 - 3) + \left(\frac{7 \times 3}{8 \times 3} - \frac{2 \times 8}{3 \times 8}\right) = 6 + \left(\frac{21}{24} - \frac{16}{24}\right) = 6\frac{5}{24}.$$

В некоторых случаях дробная часть вычитаемого может быть больше дробной части уменьшаемого.

ПРИМЕР

$8\frac{1}{5} - 3\frac{7}{9}$.

Первое, что нужно сделать – привести дробные части к общему знаменателю:

$$8\frac{1}{5} - 3\frac{7}{9} = 8\frac{1 \times 9}{5 \times 9} - 3\frac{7 \times 5}{9 \times 5} =$$

$$= 8\frac{9}{45} - 3\frac{35}{45}.$$

После приведения к общему знаменателю видно, что числитель уменьшаемого меньше числителя вычитаемого: $9 < 35$. Действуем как при вычитании правильной дроби из целого числа, т. е. уменьшаем целое число на единицу и эту единицу превращаем в неправильную дробь, в которой числитель и знаменатель равны 45:

$$8\frac{1}{5} - 3\frac{7}{9} = \left(7 + \frac{45}{45} + \frac{9}{45}\right) -$$

$$- 3\frac{35}{45} = 7\frac{54}{45} - 3\frac{35}{45} = 4\frac{19}{45}.$$

Умножение дробей

При умножении дроби на натуральное число числитель этой дроби умножается на это число, а знаменатель остается без изменений.

ПРИМЕР

$$\frac{2}{9} \times 3 = \frac{2 \times 3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Умножение дроби на натуральное число, **при котором умножение числителя на целое число дает неправильную дробь**, которую нужно преобразовать в правильную.

ПРИМЕР

$$\frac{6}{7} \times 5 = \frac{6 \times 5}{7} = \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}.$$

Чтобы перевести неправильную дробь в смешанное число, состоящее из натурального числа и правильной дроби, необходимо выполнить несколько действий.

Выделить из дроби целую часть. Для этого:

- разделить числитель на знаменатель (с остатком): 30 : 7 = 4 (остаток 2);
- получившееся частное записать как целую часть: 4;
- остаток (если есть) записать в числитель: 2;
- знаменатель оставить без изменений и записать получившееся смешанное число: $4\frac{2}{7}$.

Сокращение дроби – преобразование, при котором числитель и знаменатель дроби делятся на одно и то же число.

Важно!

В некоторых случаях, прежде чем умножать дробь на натуральное число, обратите внимание на знаменатель дроби. Если знаменатель можно разделить на это натуральное число без остатка, то так и нужно сделать!

Например: $\frac{3}{10} \times 2 = \frac{3}{10 : 2} = \frac{3}{5}$.

Решите примеры:

$181 \times \frac{6}{9}$;

$25 \times \frac{6}{8}$.

Сократите дроби:

$\frac{6}{12}$; $\frac{36}{6}$; $\frac{25}{75}$.

Чтобы перемножить обыкновенные дроби, необходимо выполнить следующие действия:

1. Умножить числитель одной дроби на числитель второй, а произведение записать в числитель полученной дроби.

2. Умножить знаменатель одной дроби на знаменатель второй, а произведение записать в знаменатель полученной дроби.

ПРИМЕР

$$\frac{1}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{1 \times 3}{5 \times 7} = \frac{3}{35}, \quad \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}.$$

Основное правило, которое следует применять **при умножении смешанных чисел**, заключается в следующем. Сначала необходимо перевести смешанное число в неправильную дробь, а после этого выполнить умножение согласно правилу умножения обыкновенных дробей.

ПРИМЕР

$$2\frac{2}{5} \times 4\frac{1}{4} = \frac{12}{5} \times \frac{17}{4} = \frac{204}{20} = \frac{51}{5} = 10\frac{1}{5}.$$

перевод в неправильную дробь

сокращение дроби

выделение целой части

Решите пример:

$$6\frac{7}{9} \times 17\frac{5}{8}.$$

Деление дробей – это то же умножение! Чтобы разделить одну дробь на другую, их необходимо перемножить, но в особом порядке.

При делении одной обыкновенной дроби на другую необходимо выполнить следующие действия:

1. Числитель первой дроби умножить на знаменатель второй, а произведение занести в числитель получившейся дроби.
2. Знаменатель первой дроби умножить на числитель второй, а произведение занести в знаменатель получившейся дроби.

ПРИМЕР

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

сокращаем частное

делимое — делитель — перевернутая дробь

Чтобы разделить обыкновенную дробь на целое число, следует выполнить следующие действия:

1. Представить число в виде неправильной дроби, причем числитель такой дроби должен быть равен самому числу, а знаменатель – единице.
2. После этого выполнить деление согласно основному правилу деления обыкновенных дробей.

ПРИМЕР

$$\frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{5} : \frac{3}{1} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}.$$

Чтобы разделить одно смешанное число на другое, нужно каждое из них перевести в неправильную дробь, а затем выполнить деление согласно основному правилу деления обыкновенных дробей.

ПРИМЕР

$$3\frac{1}{4} : 2\frac{2}{5} = \frac{13}{4} : \frac{12}{5} = \frac{13}{4} \times \frac{5}{12} = \frac{64}{48} = 1\frac{17}{48}.$$

Это интересно

Полноценная история обыкновенных дробей сформировалась в XVI в. в работах Никколо Тартальи — итальянского математика — и Христофора Клавиуса (Клавия) — немецкого математика и астронома.

Христофор Клавиус.

Памятник Никколо Тарталье в итальянском городе Брешии.

Решите пример:

$12\frac{6}{7} : 14\frac{2}{3}.$

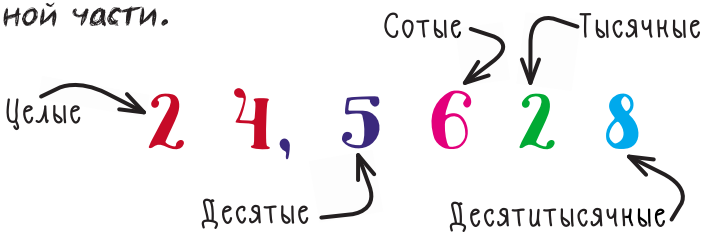
Десятичные дроби. Общие сведения

Десятичные дроби – это обыкновенные дроби со знаменателем, равным 10, 100, 1000, 10 000, 100 000 и т. д.

Десятичные дроби записываются следующим образом: 3,2; 10,3; 11,8; 0,25 и т. д.

Важно!

В десятичной дроби первой пишется целая часть, ставится запятая и записывается числитель дробной части.



Любую обыкновенную дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1000 и т. д., можно записать в виде десятичной дроби без знаменателя: сначала целую часть, затем дробную, отделив ее от целой запятой.

ПРИМЕРЫ

$3\frac{5}{10} = 3{,}5;\ 5\frac{4}{10} = 5{,}4;\ 8\frac{53}{100} = 8{,}53.$

В случае если у числа отсутствует целая часть, ее принято записывать в виде 0:

$\frac{24}{100} = 0{,}24.$

Важно!

$0{,}5 = \frac{1}{2}$

Обратите внимание, что в десятичной дроби количество цифр после запятой равно количеству нулей в знаменателе. Если, например, в знаменателе 4 нуля, т. е. он равен 10 000, то и после запятой нужно написать 4 цифры:

$$\frac{355}{10\,000} = 0{,}0355.$$

В данном примере в числителе только 3 цифры, поэтому при записи десятичной дроби нужно после запятой дописать один 0.

В десятичной дроби у каждой цифры после запятой есть свое название! Поэтому, чтобы правильно прочитать дробь, нужно знать, как называется каждая цифра.

Как правильно прочитать число 24,5628?

1. Сначала называем целую часть, затем добавляем слово «целых». Пример выше читается так: «двадцать четыре целых».

2. Затем читаем число справа от запятой: «пять тысяч шестьсот двадцать восемь», а так как последняя цифра находится в разряде десятитысячных, то необходимо добавить слово «десятитысячных».

Полное название дроби 24,5628 следует читать так: двадцать четыре целых пять тысяч шестьсот двадцать восемь десятитысячных.

Важно!

Сколько бы нулей вы ни добавляли к дробной части десятичной дроби после последней цифры, значение этой дроби останется прежним!

Например:

$8{,}02 = 8{,}020000000000\ldots$

$61{,}4 = 61{,}40000000000\ldots$

Самое важное, что нужно запомнить: нули можно добавлять или убирать только после самой последней цифры после запятой. В другом месте нули дописывать или убирать нельзя!

$21{,}035 = 21{,}035000\ldots$

$21{,}035 \neq 21{,}35.$

Периодическая десятичная дробь – это такая дробь, в записи которой одна цифра или группа цифр повторяется бесконечно много раз. Эту цифру называют периодом дроби, а в краткой записи пишут в скобках, например так: 18,67 (141). Это рациональное число.

Непериодическая десятичная дробь – это такая дробь, в записи которой нет бесконечно повторяющихся цифр или групп цифр. Это иррациональное число.

Прочитайте десятичные дроби:

23,58976;

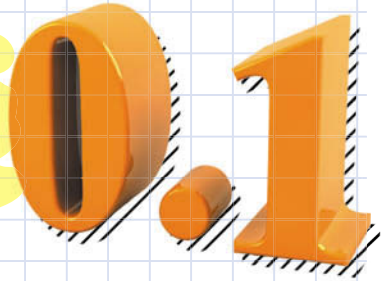
111,0987;

19,40974.

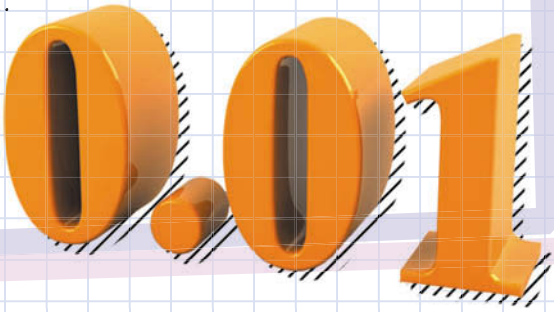
Сложение десятичных дробей

Если под рукой нет калькулятора, то **сложение десятичных дробей** необходимо выполнять согласно правилам сложения в столбик. После того как десятичные дроби правильно записаны в столбик, их складывают, как натуральные числа, при этом запятая во внимание не берется. В результате она записывается под запятыми исходных дробей.

Возможно, при сложении десятичных дробей с разным количеством знаков после запятой вам будет удобнее дописать нули в дроби с меньшим количеством знаков. Таким образом вы уравняете количество цифр после запятой.



Сложение в столбик применяется для больших чисел и представляет собой особую запись, при которой последняя цифра первого числа находится над последней цифрой второго числа, предпоследняя цифра первого числа находится над предпоследней цифрой второго числа и т. д. (т. е. получается «столбик»). Складываются цифры справа налево, а результат записывается под чертой.



ПРИМЕР

$$\begin{array}{r} 2368 \\ +\ 236 \\ \hline 2604 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3698 \\ +\ 1239 \\ \hline 4937 \end{array}.$$

Важно!

При сложении в столбик десятичных дробей есть особенность: цифры необходимо записать так, чтобы совпали все разряды. То есть одноименные разряды должны находиться друг под другом: десятые под десятыми, сотые под сотыми, тысячные под тысячными и т. д.

ПРИМЕР

$$\begin{array}{r} 23{,}158 \\ +\ 30{,}51 \end{array}$$

Неправильно

$$\begin{array}{r} 23{,}158 \\ +\ 30{,}51 \end{array}$$

Правильно

Выполним сложение десятичных дробей: 28,6 + 1,521.

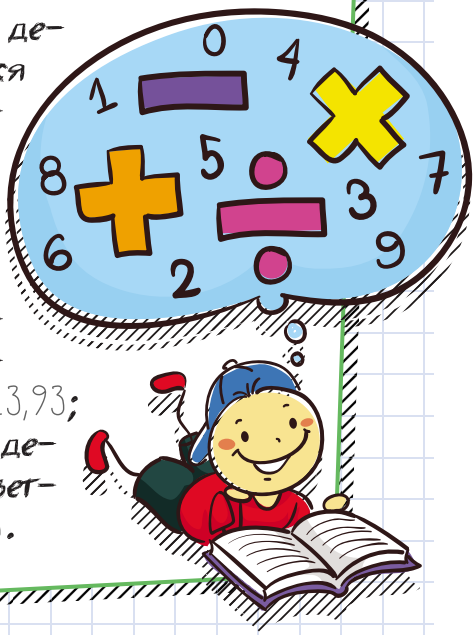
В данном случае количество знаков после запятой в обеих дробях разное, поэтому к дроби с меньшим количеством знаков после запятой можно дописать нули: 28,6 = 28,600.

Сейчас в обеих десятичных дробях количество знаков после запятой одинаковое (600 и 521), поэтому и складывать их в столбик гораздо легче:

$$\begin{array}{r} 28{,}600 \\ +\ 1{,}521 \\ \hline 30{,}121 \end{array}$$

Важно!

При сложении отрицательных десятичных дробей применяются такие же правила, как при сложении целых чисел.



ПРИМЕР

$(-3{,}4) + (-10{,}53)$

Поскольку при сложении положительных десятичных дробей получаем $3{,}4 + 10{,}53 = 13{,}93$; то при сложении отрицательных десятичных дробей получаем соответственно $(-3{,}4) + (-10{,}53) = -13{,}93$.

Это интересно

Нередко в изображении десятичной дроби можно увидеть не запятую, а точку.

Важно!

Любое действительное число можно представить как бесконечную дробь, периодическую или непериодическую.

Решите пример:
$245{,}109 + 28{,}091$.

Вычитание десятичных дробей

Так же, как и сложение, **вычитание десятичных дробей** производится согласно правилам вычитания в столбик.

Прежде чем из одной десятичной дроби вычесть другую, необходимо произвести следующие действия:

1. Посмотреть на дробь, посчитать количество знаков после запятой и, если в этом есть необходимость, уравнять знаки, т. е. в дробь с меньшим количеством знаков дописать нули.
2. Записать уменьшаемое и вычитаемое десятичных дробей так, чтобы цифры каждого разряда находились друг под другом.
3. Выполнить вычитание в столбик.
4. В разности запятую поставить под запятыми уменьшаемого и вычитаемого.

Выполним действия по вычитанию одной десятичной дроби из другой.

ПРИМЕР

Найдем решение для примера 58,69 – 2,142. В уменьшаемом после запятой меньше знаков, чем в вычитаемом, поэтому знаки нужно уравнять нулями: 58,69 = 58,690. Цифры вычитаемого подписываем под разрядами цифр уменьшаемого и выполняем вычитание:

$$\begin{array}{r} 58{,}690 \\ -\ 2{,}142 \\ \hline 56{,}548 \end{array}$$

Можно вычитать десятичные дроби по разрядам справа налево, начиная с последней цифры после запятой. Основное правило заключается в вычитании тысячных из тысячных, сотых из сотых, десятых из десятых, целых из целых. Если в процессе выполнения действий приходится вычитать из меньшей цифры большую, то необходимо занять десяток у предыдущего разряда.

Если при вычитании в столбик не хватает единиц в каком-либо разряде, то их можно занять из предыдущего разряда. Например: 31,2 – 18,54 =

$$\begin{array}{r} 31{,}20 \\ -\ 18{,}54 \\ \hline 12{,}66 \end{array}.$$

Важно!

Общее правило сложения и вычитания десятичных дробей: при сложении или вычитании десятичных дробей их нужно записать друг под другом с учетом каждого разряда, а затем выполнять вычисления как с натуральными числами. В сумму или разность необходимо перенести запятую.

Выполним действия по вычитанию двух десятичных дробей с помощью разрядов.

ПРИМЕР

14,23 – 9,4.

1. Начинать вычитание нужно с сотых. Так как в вычитаемом в разряде сотых 0, то цифра 3 остается:

14,23 – 9,4 = ..,.3.

2. Далее вычитаем десятки. В уменьшаемом в разряде десятков 2, в вычитаемом – 4. Из меньшего большее вычесть нельзя, поэтому занимаем десяток у предыдущего числа, т. е. 12 – 4 = 8, и записываем эту цифру в разряде десятков:

14,23 – 9,4 = ..,83.

3. Вычитаем целые части: в вычитаемом вместо 14 осталось 13, т. к. единицу уже занимали:

13 – 9 = 4.

4. Записываем результат:

14,23 – 9,4 = 4,83.

Решите примеры:

78,193 – 55,905;

762,181 – 15,897;

678,19 – 19,003.

Умножение десятичных дробей

Общее **правило умножения десятичных дробей** сводится к следующему:

1. Десятичные дроби необходимо перемножить как обычные числа, не обращая внимания на запятые.
2. Подсчитать количество знаков после запятой у всех множителей.
3. В произведении справа налево отсчитать столько цифр, сколько получилось в сумме знаков после запятой у всех множителей, и отделить запятой эти цифры.

Иногда при умножении десятичных дробей в результате может получиться меньше цифр, чем нужно отделить запятой. Как поступить в таком случае? Приписать слева недостающее количество нулей!

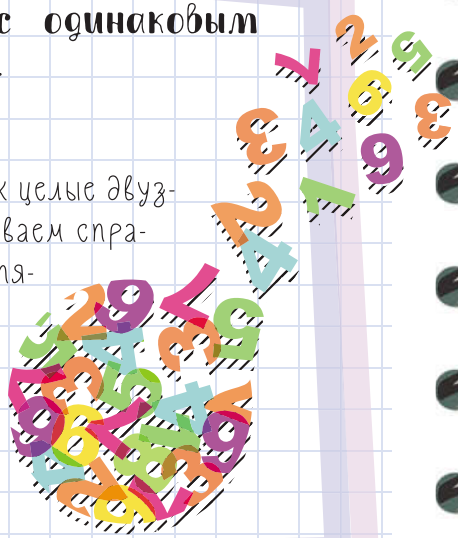
Например: $2{,}36 \times 0{,}02 = 0{,}0472$.

Умножаем 236 на 2 (как обычные числа) и получаем 472. Согласно правилу, отделить запятой нужно 4 цифры, т. к. общее количество знаков после запятой в обоих множителях равно 4. Но в нашем примере в результате умножения получилось число, в котором только 3 цифры. Поэтому нужно дописать слева 2 нуля и отделить запятой 4 цифры.

Перемножим две десятичные дроби **с одинаковым числом знаков после запятой**.

ПРИМЕР

Возьмем 2,8 × 5,6. Перемножаем их как целые двузначные числа, и в произведении отсчитываем справа налево две цифры и отделяем их запятой. В результате 2,8 × 5,6 = 15,68.



$$\begin{array}{r} 2,8 \\ \times\ 5,6 \\ \hline 168 \\ +\ 140 \\ \hline 15,68 \end{array}$$

Перемножим две десятичные дроби **с разным количеством знаков после запятой**.

ПРИМЕР

Перемножим 5,65 × 2,4.

Записываем числа в столбик и перемножаем, как обычные числа 565 и 24:

$$\begin{array}{r} 5,65 \\ \times\ 2,4 \\ \hline 2260 \\ +\ 1130 \\ \hline 13,560 \end{array}$$

Считаем общее количество знаков после запятой в обоих множителях (в данном примере три знака), отсчитываем справа налево три цифры и отделяем их запятой: 5,65 × 2,4 = 13,56. Обратите внимание, что в результате умножения в конце записи оказался нуль, но в окончательный ответ мы его не записываем.

Важно!

Существует два способа умножения на 0,1; 0,01; 0,001 и т. д.

СПОСОБ 1

Вместо того чтобы умножить число на 0,1; 0,01; 0,001 и т. д., его можно разделить соответственно на 10, 100, 1000 и т. д.

Например:

$35 \times 0{,}1 = 35 : 10 = 3{,}5;$

$234 \times 0{,}01 = 234 : 100 = 2{,}34.$

СПОСОБ 2

При умножении десятичной дроби на 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. надо в первом множителе перенести запятую влево на столько знаков, сколько нулей стоит перед единицей во втором множителе.

Например:

$65 \times 0{,}1 = 6{,}5;$

$0{,}89 \times 0{,}1 = 0{,}089;$

$1{,}285 \times 0{,}01 = 0{,}01285.$

Между двумя десятичными дробями всегда можно поставить третью.

Например:

между 2,3 и 2,4 – 2,35;

между 2,35 и 2,36 – 2,355;

между 2,355 и 2,356 – 2,3551 и т. д.

Деление десятичных дробей

Чтобы решать задачи с делением десятичных дробей, вспомним, что десятичная дробь – нецелое число со знаменателем, который делится на 10.

Деление десятичных дробей на натуральное число выполняется по правилам деления в столбик без учета запятых. Когда заканчивается деление целой части, в частном ставится запятая и деление продолжается.

ПРИМЕР

$65{,}8 : 4 = 16{,}45.$

```
 65,8 | 4
-4    16,45
 25
-24
  18
- 16
   20
-  20
    0
```

Это интересно

Полную теорию десятичных дробей создал самаркандский астроном Джемшид аль-Каши в XV в. Он изложил правила действий с десятичными дробями в своем трактате «Ключ к арифметике».

Деление натурального числа на десятичную дробь выполняется в несколько этапов:

1. Сначала нужно подсчитать, сколько знаков находится справа от запятой в десятичной дроби.

2. Затем необходимо делимое и делитель умножить на 10, 100, 1000, 10 000 или тому подобное число, чтобы перевести десятичную дробь в натуральное число.

3. Осталось выполнить деление по правилу деления натуральных чисел.

Разделим натуральное число на десятичную дробь.

ПРИМЕР

90 : 0,15.

В десятичной дроби после запятой два знака. Поэтому, чтобы перевести 0,15 в целое число, его нужно умножить на 100: $90 : 0{,}15 = (90 \times 100) : (0{,}15 \times 100) = 9000 : 15 = 600$.

Запомните, что на 100 умножаем не только делимое, но и делитель!

Известно несколько способов деления десятичных дробей друг на друга. Здесь мы рассмотрим несколько из них, чтобы у вас была возможность выбрать наиболее приемлемый вариант.

Первый способ деления десятичных дробей друг на друга.

1. Прежде чем делить десятичные дроби, необходимо посчитать количество знаков после запятой в делителе.

2. Затем перенести запятую в делимом и делителе вправо на то число знаков, которое находится после запятой в делителе.

3. Выполнить деление по общим правилам деления на натуральное число.

ПРИМЕР

43,83 : 2,4.

После запятой в делителе находится одна цифра, значит, запятую в делимом и делителе нужно перенести на один знак вправо и выполнить деление на натуральное число:

438,3 : 24 = 18,2625.

Второй способ деления десятичных дробей друг на друга.

1. Прежде чем делить десятичные дроби, необходимо определить дробь с самым большим количеством знаков после запятой.
2. Затем перевести делимое и делитель в натуральные числа, умножив их на 10, 100, 1000, 10 000 или более в зависимости от наибольшего количества цифр после запятой.
3. Выполнить деление по общим правилам деления в столбик.

ПРИМЕР

9,15 : 1,5.

Самое большое количество знаков после запятой – в делимом. Их 2, поэтому и делимое, и делитель нужно умножить на 100 и выполнить деление натуральных чисел:

$9{,}15 : 1{,}5 = (9{,}15 \times 100) : (1{,}5 \times 100) = 915 : 150 = 6{,}1.$

```
 915 | 150
-900 | 6,1
 150
-150
   0
```

Важно!

В случае если делитель больше делимого, в частном необходимо записать нуль целых.

Например: $0{,}36 : 6 = 0{,}06$. $6 > 0{,}36$, *поэтому сразу же ставим нуль в целой части частного и продолжаем деление по правилам натуральных чисел.*

Деление десятичной дроби на 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 и т. д. означает умножение этой дроби на 10, 100, 1000, 10 000 соответственно.

ПРИМЕР

0,35 : 0,1 = 0,35 × 10 = 3,5;
5,2 : 0,1 = 5,2 × 10 = 52;
61,87 : 0,01 = 61,87 × 100 = = 6187.

Делить десятичную дробь на 10, 100, 1000, 10 000 и т. д. очень просто! Нужно лишь перенести запятую в той дроби, которую делим, на столько цифр влево, сколько нулей находится в делителе.

ПРИМЕРЫ

522,4 : 10 = 52,24;
963,5 : 100 = 9,635;
0,81 : 10 = 0,081.

Важно!

При делении натуральных чисел может получиться десятичная дробь.

Например: 18 : 8.

```
 18 | 8
-16   2,25
 20
-16
 40
-40
  0
```

При делении 18 на 8 получается 2 целых, а по окончании вычислений получаем результат:

18 : 8 = 2,25.

Решите пример:
126 : 16.

Сравнение десятичных дробей

При **сравнении десятичных дробей** следует руководствоваться следующим общим правилом. Для удобного сравнения дроби желательно записать так, чтобы в дробной части обоих чисел было одинаковое количество знаков. Если в одной из дробей знаков после запятой меньше, то в эту дробную часть необходимо дописать нули.

Сначала сравнивают целые части дроби. Если одна из целых частей меньше или больше другой, то, соответственно, и вся десятичная дробь будет меньше или больше другой. В таком случае нет никакой необходимости сравнивать дробные части. Если целые части равны, начинаем сравнивать дробные части поразрядно: десятые с десятыми, сотые с сотыми, тысячные с тысячными и т. д. Как только находим первый несовпадающий разряд, начинаем сравнивать его цифры: в какой дроби цифра больше, то число и будет больше.

Рассмотрим несколько способов сравнения.

Это интересно

Мало кто задумывается над тем, что сравнением десятичных дробей всем хоть раз приходилось заниматься... во время болезни. Ведь когда человек болеет и меряет температуру, ему волей-неволей приходится сравнивать показания термометра, а это и есть десятичные дроби!

СПОСОБ 1

Сравним десятичные дроби 23,5 и 23,531. Согласно правилу, уравниваем количество знаков после запятой в обеих дробях. В первой дроби после запятой знаков меньше, поэтому дописываем нули и сравниваем дроби в следующем виде: 23,500 и 23,531.

Сравниваем дроби. Целые части дробей равны (23 = 23), десятые тоже равны (5 = 5). При сравнении сотых очевидно, что 0 < 3, поэтому и дробь 23,5 < 23,531.

СПОСОБ 2

Сравним десятичные дроби 82,678 и 82,67. По правилу уравниваем количество знаков после запятой в обеих дробях: 82,678 и 82,670. А сейчас можно превратить десятичные дроби в натуральные числа, умножив обе на 1000, и сравнить натуральные числа:

82,678 × 1000 и 82,670 × 1000.

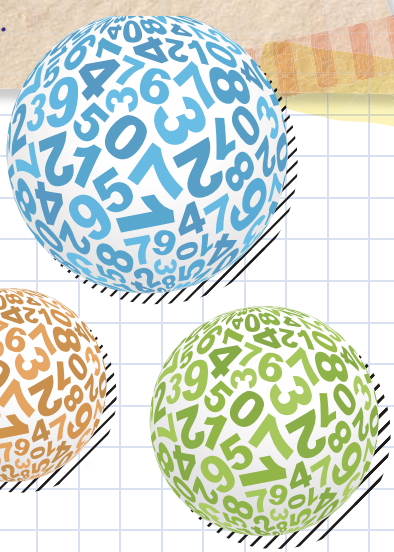
Сравниваем 82 678 и 82 670. Очевидно, что 82 678 > 82 670, следовательно, и 82,678 > 82,67.

Сравните дроби:
67,097 и 67,12;
89,171 и 89,90.

Округление десятичных дробей

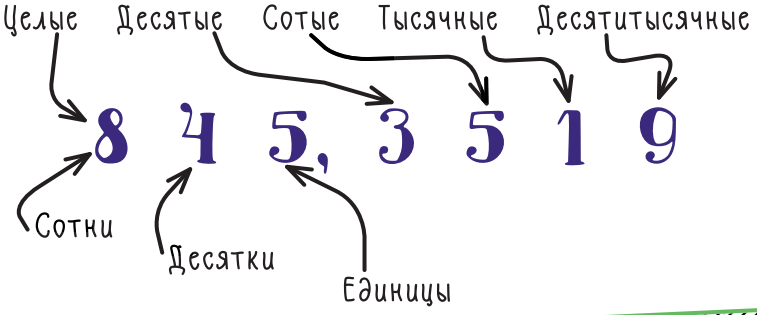
Такое же действие, как **округление** натуральных чисел, можно выполнить и с десятичными дробями в тех случаях, когда точное значение не требуется и приближенное вполне устроит.

В зависимости от ситуации и необходимости десятичные дроби округляют как до целой части, так и до одного из разрядов дробной.



Важно!

Вспомним названия основных разрядов:



Существуют определенные правила округления десятичной дроби до определенного разряда:

1. Определите разряд, до которого нужно округлить число, и подчеркните эту цифру.

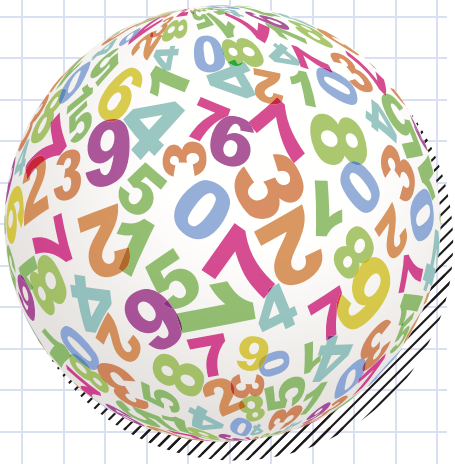
2. Выделите все цифры, которые стоят справа от этого разряда. Можно сделать это любым маркером или просто провести вертикальную черту.

3. А сейчас самый важный момент: если справа от подчеркнутой цифры стоит 0, 1, 2, 3 или 4, то все выделенные цифры, стоящие справа от цифры округляемого разряда, удаляем, при этом сама цифра разряда, до которого мы округляем, остается без изменений.

4. Если же справа от подчеркнутой цифры стоит 5, 6, 7, 8 или 9, то все выделенные цифры, стоящие справа от цифры округляемого разряда, удаляем, а сама цифра разряда, до которого мы округляем, увеличивается на 1.

Важно!

В случае если десятичную дробь нужно округлить до десятков, сотен и т. д. (т. е до какого-либо разряда целой части), то дробную часть не принимают во внимание вообще (ее просто опускают), а целую часть округляют как обычные натуральные числа.



Необходимо округлить число 58,9183 до сотых.

1. 58,9183 – подчеркиваем цифру, до которой нужно округлить.
2. 58,91/83 или 58,9183 – проводим черту или выделяем маркером.
3. Округляем: 58,9183 ≈ 58,92. Так как после цифры разряда сотых стоит 8, то саму цифру разряда увеличиваем на 1 (1 + 1 = 2), а цифры справа от нее удаляем.

Необходимо округлить число 0,6271 до десятых.

1. 0,6271 – подчеркиваем цифру, до которой нужно округлить.
2. 0,6/271 или 0,6271 – проводим черту или выделяем маркером.
3. Округляем: 0,6271 ≈ 0,6. Так как после цифры разряда десятых стоит 2, то саму цифру разряда оставляем без изменений, а цифры справа от нее удаляем.

Важно!

Вы можете столкнуться с примерами, когда при округлении последняя оставшаяся цифра разряда в дробной части равна нулю. В таком случае его необходимо оставить. Например, нужно округлить 61,0338 до десятых: 61,0338 ≈ 61,0.

Проверьте себя и запишите ответ:

1. Какие дроби из перечисленных здесь являются правильными: $\frac{4}{9}, \frac{5}{54}, \frac{97}{8}, \frac{65}{89}, \frac{34}{45}, \frac{16}{18}, \frac{5}{7}, \frac{7}{10}, \frac{6}{5}$?

2. Какие дроби из перечисленных здесь являются неправильными: $\frac{34}{67}, \frac{7}{87}, \frac{89}{14}, \frac{4}{3}, \frac{78}{15}, \frac{5}{6}, \frac{6}{2}, \frac{4}{12}, \frac{67}{6}$?

3. Сравните дроби: $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{7}$ и $\frac{3}{8}$; $\frac{6}{11}$ и $\frac{1}{8}$.

4. Приведите к общему знаменателю дроби: $\frac{5}{9}$ и $\frac{3}{8}$; $\frac{4}{15}$ и $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{10}$ и $\frac{8}{6}$; $\frac{2}{12}$ и $\frac{1}{4}$; $\frac{7}{9}$ и $\frac{5}{4}$; $\frac{3}{24}$ и $\frac{7}{3}$.

5. Сложите дроби: $\frac{2}{17}+\frac{1}{2}$; $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}$; $\frac{4}{9}+\frac{1}{7}$; $\frac{3}{11}+\frac{7}{13}$.

6. Вычтите дроби: $\frac{6}{8}-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{8}-\frac{1}{10}$; $\frac{12}{10}-\frac{1}{7}$; $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; $\frac{12}{17}-\frac{1}{2}$.

7. Перемножьте дроби: $\frac{4}{7}$ и $\frac{9}{5}$; $\frac{12}{7}$ и $\frac{5}{7}$; $\frac{5}{7}$ и $\frac{12}{5}$; $\frac{4}{15}$ и $\frac{3}{5}$.

8. Поделите дроби $\frac{6}{8}$ и $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{8}$ и $\frac{1}{6}$; $\frac{12}{8}$ и $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{8}$; $\frac{12}{5}$ и $\frac{1}{4}$.

9. Сложите смешанные числа: $11\frac{3}{7}+7\frac{4}{9}$; $5\frac{3}{5}+17\frac{4}{7}$.

10. Сравните дроби: 23,5 и 23,531; 67,890 и 67,091.

11. Перемножьте дроби: 2,27 × 0,03; 6,65 × 0,005; 3,71 × 1,078.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

Отношение чисел и пропорции

Отношение чисел

Отношение двух чисел – это частное этих чисел.

Отношение двух чисел можно записать двумя способами:

1. $a : b$;
2. $\frac{a}{b}$.

В обоих случаях следует читать «отношение a к b».

Например, отношение 100 к 5 можно записать как $100 : 5 = \frac{100}{5} = 20$; а отношение 4 к 12 как $4 : 12 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Знание дробей поможет разобраться с новыми понятиями: **отношение чисел** и **пропорции**. Уже известно, что дробь – это размер части предмета. Треть часа, половина пути, 2,5 кг картофеля, 0,5 л кефира – вот лишь несколько примеров употребления дробей в повседневной жизни.

Когда нам приходится что-то сравнивать, т. е. нас интересует, во сколько раз один предмет меньше или больше другого, один человек старше или младше другого, во сколько раз на какой-то улице больше домов, чем на другой, и т. д., мы тоже используем дроби.

Чтобы понять, что такое отношение чисел, можно представить, что в бассейн пришли 3 мальчика и 6 девочек. Сравним, во сколько раз меньше мальчиков и больше девочек.

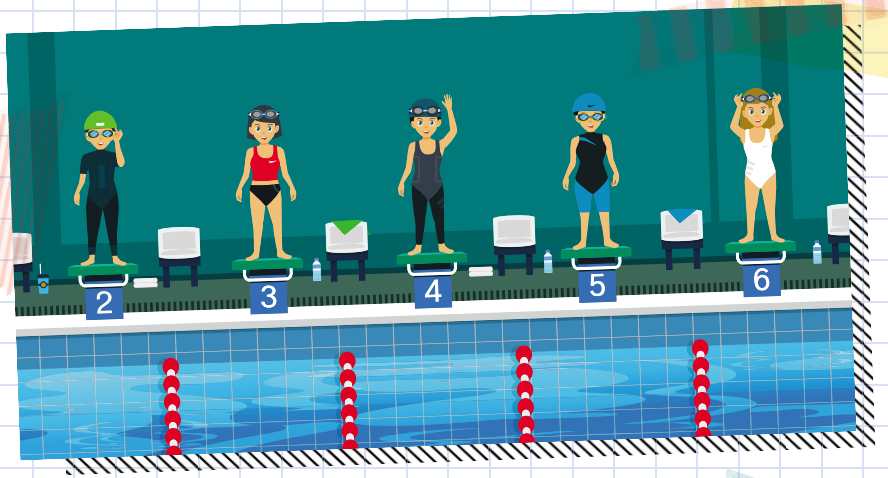
Чтобы сравнить, нужно найти частное двух чисел:

$$\frac{\text{3 мальчика}}{\text{6 девочек}} = \frac{1}{2},$$

т. е. мальчиков наполовину меньше, чем девочек.

$$\frac{\text{6 девочек}}{\text{3 мальчика}} = 2,$$

т. е. девочек в два раза больше, чем мальчиков.



Вы нашли в лесу 15 сыроежек и 5 белых грибов. Подсчитайте, во сколько раз больше сыроежек и во сколько раз меньше белых грибов.

Важно!

Отношение двух чисел необходимо для сравнения двух величин, т. е. когда нужно узнать, во сколько раз одно число больше другого или какую часть одно число составляет от другого.

Рассмотрим на примере использование отношений двух чисел.

ПРИМЕР

В прошлом году на одном из приусадебных участков хозяева собрали 4 кг голубики, а в этом году – 12 кг. Во сколько раз увеличился урожай голубики в этом году по сравнению с прошлым?

В данном случае нужно записать отношение количества собранной голубики в этом году к количеству голубики в прошлом:

$\frac{12}{4} = 3$, т. е. урожай голубики увеличился в 3 раза.

Важно!

В знаменатель дроби принято записывать то число, с которым сравнивают.

Пропорции. Основные сведения

Пропорция – это равенство двух отношений.

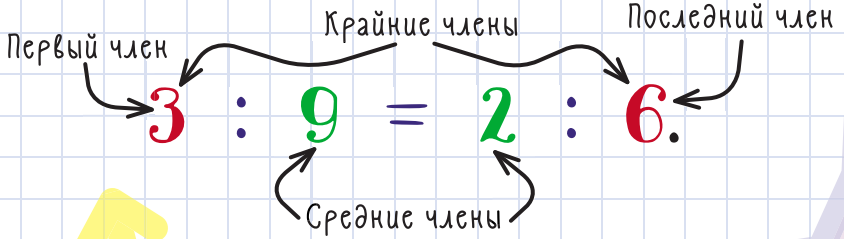
Говоря другими словами, если между двумя отношениями можно поставить знак равенства, то такие отношения образуют пропорцию.

Это интересно

Теорию о равенстве отношений первым разработал древнегреческий математик Евдокс Книдский.

В любой пропорции различают **средние** и **крайние члены**.

Например, пропорцию $\frac{3}{9} = \frac{2}{6}$ можно записать в следующем виде: $3 : 9 = 2 : 6$, где



В буквенном выражении пропорцию можно записать так:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ или $a : b = c : d$.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \textbf{или} \quad a : b = c : d$$

Пропорция считается верной, если произведение ее крайних членов равно произведению средних членов. Это и есть **основное свойство пропорции.**

В буквенном выражении основное свойство пропорции можно записать следующим образом: $a \times d = c \times b$.

$$a \times d = c \times b$$

Если в верной пропорции поменять местами крайние или средние члены, то вновь созданные пропорции также окажутся верными.

ПРИМЕР

$\frac{2}{10} = \frac{5}{25}$ и $\frac{25}{10} = \frac{5}{2}$.

Важно!

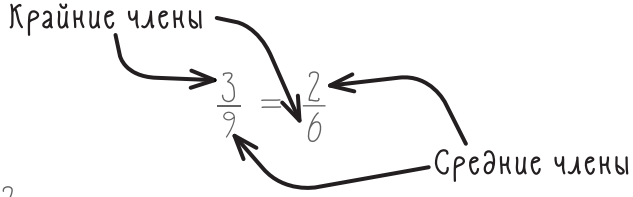
При решении задач с использованием пропорций одинаковые единицы измерения нужно записывать друг под другом. Например, часы под часами, минуты под минутами, километры под километрами, килограммы под килограммами и т. д.

Выяснить, равны между собой два отношения или нет, можно двумя способами:

1. Сравнить их частные.
2. Перемножить члены пропорции.

Важно!

Чаще всего крайние и средние члены пропорции перемножают по так называемому правилу креста, т. е. крест накрест.



$\frac{3}{9} \times \frac{2}{6}$,

$3 \times 6 = 9 \times 2$, $18 = 18$, **т. е. пропорция составлена верно.**

Это интересно

Древнеримский архитектор Витрувий писал о пропорциях человека: «Длина четырех пальцев равна длине ладони, четыре ладони равны стопе, шесть ладоней составляют один локоть, четыре локтя — рост человека. Леонардо да Винчи переосмыслил эти пропорции в эпоху Возрождения.

Пропорции и решение задач

Пропорции очень удобно использовать для решения задач: если известны три члена пропорции, всегда можно найти неизвестный член.

Рассмотрим несколько примеров и найдем неизвестный член n.

Решим пример, включающий неизвестный числитель:

$\frac{4}{5} = \frac{n}{25}$.

Для того чтобы найти n, нужно использовать основное свойство пропорции (перемножаем известные члены по диагонали, а затем получившийся результат делим на оставшееся число):

$5 \times n = 4 \times 25$;

$5 \times n = 100$;

$n = 100 : 5 = 20$;

$n = 20$.

Решим пример, включающий неизвестный знаменатель:

$\frac{40}{n} = \frac{60}{3}$.

Перемножаем крайние и средние члены по правилу «креста»:

$n \times 60 = 40 \times 3$;

$n \times 60 = 120$;

$n = 120 : 60 = 2$;

$n = 2$.

Решим задачу. Для приготовления 2 л домашнего лимонада необходимо 4 лимона. Сколько лимонов нужно взять, чтобы приготовить 6 л лимонада?

Для решения этой задачи давайте составим следующую пропорцию:

2 л – 4 лимона,

6 л – n лимонов, т. е. $\frac{2}{6} = \frac{4}{n}$.

$2 \times n = 4 \times 6$;

$2 \times n = 24$;

$n = 24 : 2 = 12$;

$n = 12$.

Ответ: 12 лимонов.

Решим задачу. Садовник может посадить 3 дерева в день. Сколько деревьев посадят 3 садовника, если каждый из них будет сажать по 3 дерева в день.

Для решения задачи можно использовать пропорцию:

1 садовник – 3 дерева,

3 садовника – n деревьев, т. е. $\frac{1}{3} = \frac{3}{n}$.

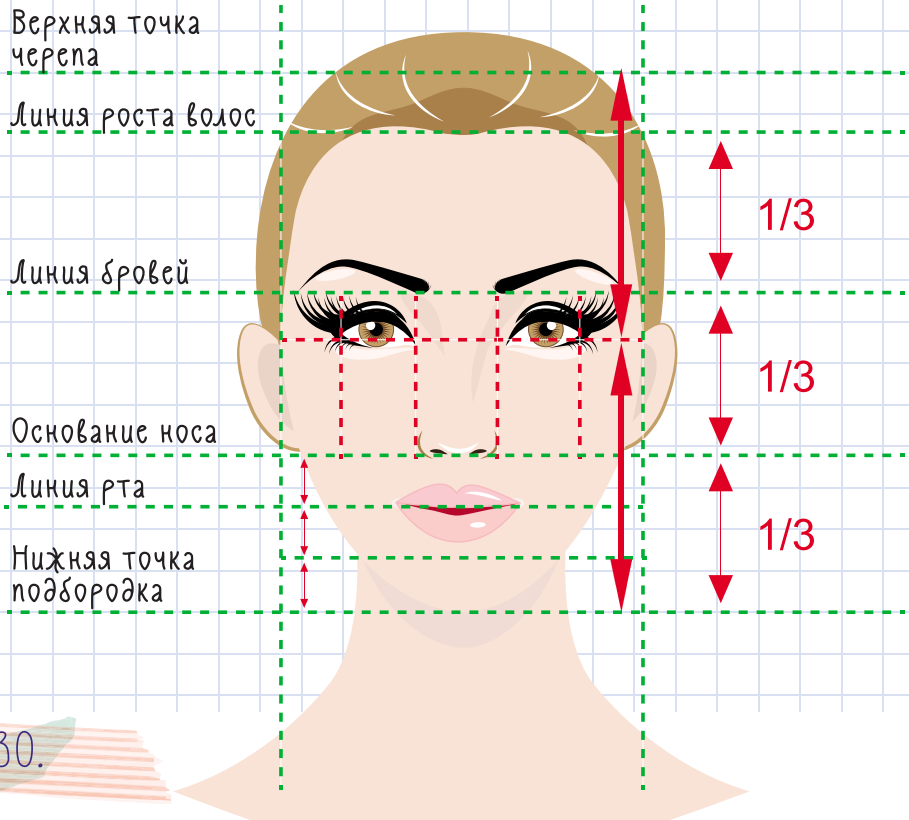
$3 \times 3 = n$;

$n = 9$.

Ответ: 9 деревьев.

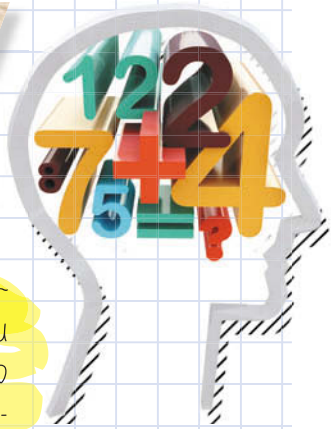
Это интересно

Издавна математиков и художников интересовали параметры идеального лица! Они пришли к выводу, что идеальное лицо — это совокупность определенных соотношений его основных пропорций. Наиболее признанной считается теория величайшего итальянского художника, ученого и инженера Леонардо да Винчи. Суть теории сводится к следующему: две горизонтальные линии, проведенные по уровню бровей и у основания носа, визуально делят лицо на три равные части. А в результате деления лица вертикальными линиями идеальное расстояние между глазами равно расстоянию от внутреннего угла глаза до внешнего и ширине крыльев носа.



Прямая и обратная пропорциональная зависимость

В пропорции отношения могут быть либо прямо пропорциональны, либо обратно пропорциональны.



Две величины называются **прямо пропорциональными**, если при увеличении (или уменьшении) одной из них в несколько раз другая увеличивается (или уменьшается) во столько же раз.

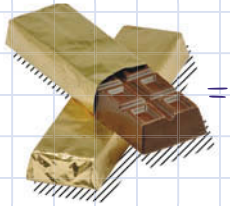
Говорить о наличии **обратной пропорциональной зависимости** можно в том случае, если при увеличении (или уменьшении) одной из них в несколько раз другая уменьшается (или увеличивается) во столько же раз.

Важно!

Уже говорилось, что пропорция — это равенство двух отношений, например $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$. Доказать равенство этих отношений можно двумя способами: применить основное свойство пропорции или посчитать, чему равно каждое из этих отношений. Так, первое отношение равно $\frac{1}{2}$, и второе отношение также равно $\frac{1}{2}$.

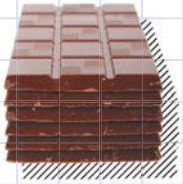
Чтобы проиллюстрировать такое понятие, как **прямая пропорциональная зависимость**, рассмотрим пример с шоколадками.

Допустим, за 2 плитки шоколада заплатили 160 руб.



= 160 руб.

Сколько нужно заплатить за 6 плиток?



= ? руб.

1. Чтобы решить эту задачу, прежде всего составим пропорцию:

$$\frac{2 \text{ плитки}}{6 \text{ плиток}} = \frac{160}{n}.$$

2. Решим пропорцию:

$$\frac{160 \times 6}{2} = 480 \text{ (руб.)}.$$

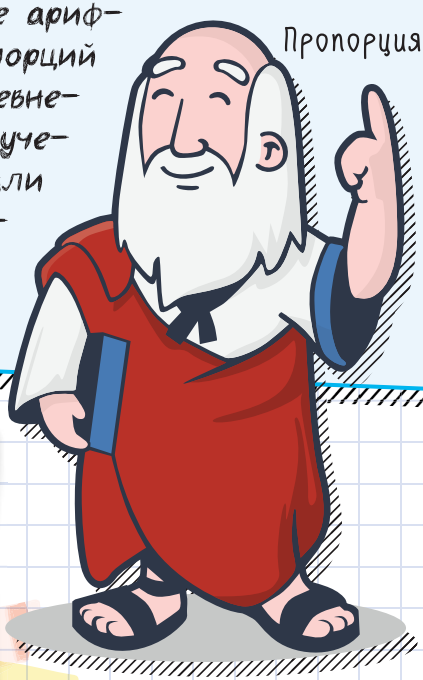
3. Поставим стрелки от меньшего значения к большему в обоих отношениях и внимательно посмотрим на эту пропорцию:

$$\frac{2 \text{ плитки}}{6 \text{ плиток}} \downarrow = \frac{160 \text{ руб.}}{480 \text{ руб.}} \downarrow$$

Направление обеих стрелок совпадает, т. е. можно сделать вывод, что с увеличением количества плиток шоколада увеличилась и цена! Чтобы купить больше, нужно и заплатить во столько же раз больше. Это и есть прямая пропорциональная зависимость.

Это интересно

Понятие пропорций появилось еще в древности. Еще в древнем Вавилоне пришли к понятию пропорциональности сторон, рассматривая подобные треугольники. Первым же арифметическую теорию пропорций разработали Пифагор, древнегреческий ученый, и его ученики, которые рассматривали три вида пропорций: арифметическую, геометрическую, гармоническую.



Решите задачу:

Три общих тетради стоят 130 рублей.

Сколько стоят пять тетрадей?

Важно!

Геометрическая пропорция — это известное равенство частных $a : b = c : d$.

Арифметическая пропорция — это равенство разностей $a - b = c - d$.

Гармоническая пропорция — это равенство $a : b = b : (a - b)$. Разложение a на сумму двух слагаемых b и $a - b$ — это золотое сечение.

Чтобы проиллюстрировать **обратную пропорциональную зависимость**, рассмотрим следующий пример. Расстояние между двумя городами автобус проехал со скоростью 60 км/ч за 3 ч. За сколько часов это же расстояние проедут велосипедисты, двигаясь со скоростью 20 км/ч?

Расстояние между городами остается прежним, а так как скорость велосипеда в три раза меньше скорости автобуса, то времени для преодоления этого расстояния ему потребуется в три раза больше:

60 км/ч – 3 ч,

20 км/ч – 9 ч.

Внимательно рассмотрим получившиеся величины. В данном случае у нас есть отношение скорости и отношение времени, т. е. $\frac{60\text{ км/ч}}{20\text{ км/ч}}$ и $\frac{3\text{ ч}}{9\text{ ч}}$. А сейчас в каждом отношении поставим стрелки от меньших величин к бóльшим:

$\uparrow\frac{60\text{ км/ч}}{20\text{ км/ч}}$ и $\frac{3\text{ ч}}{9\text{ ч}}\downarrow$.

Направление стрелок не совпадает, да и поставить знак равенства в данной пропорции нельзя:

$\frac{60\text{ км/ч}}{20\text{ км/ч}} \neq \frac{3\text{ ч}}{9\text{ ч}}$, т. к. $3 \neq \frac{1}{3}$.

Как правильно записать отношение в этом случае? В одной из дробей необходимо поменять местами числитель и знаменатель:

$\frac{60\text{ км/ч}}{20\text{ км/ч}} = \frac{9\text{ ч}}{3\text{ ч}}\updownarrow$.

Сейчас пропорция составлена правильно, т. к. $3 = 3$.

Чтобы проверить правильность решения этой задачи, составляем следующую пропорцию:

$\frac{60\text{ км/ч}}{20\text{ км/ч}} = \frac{n}{3\text{ ч}}$;

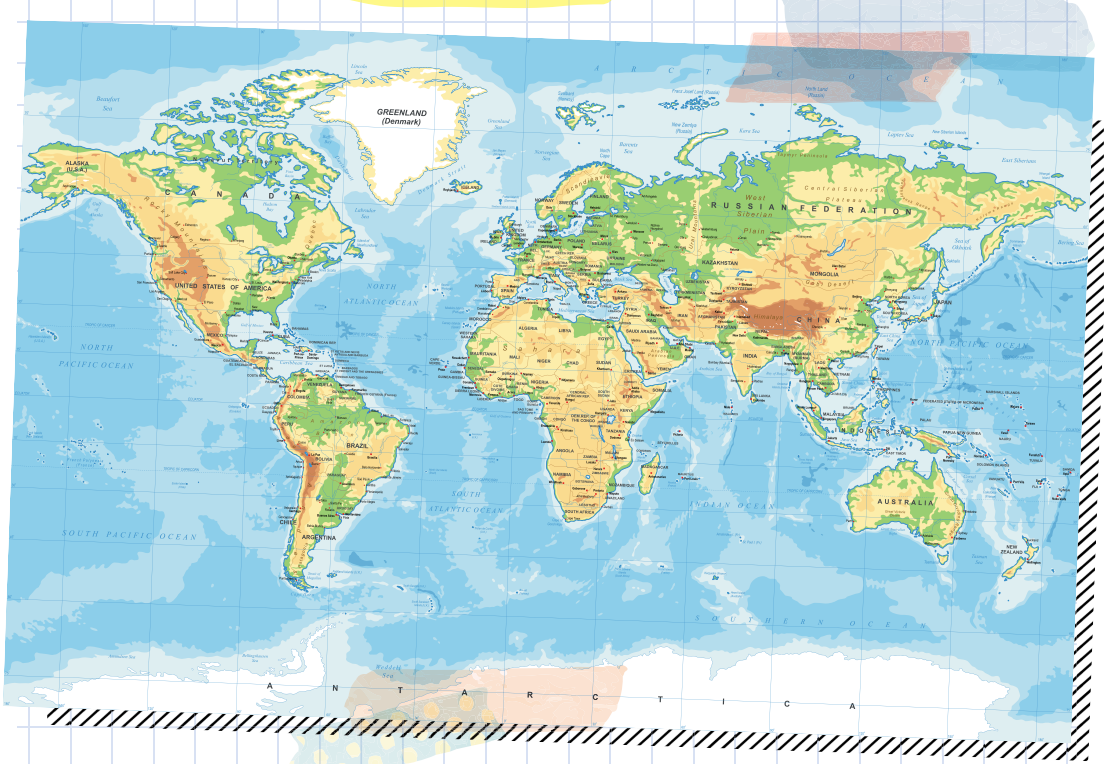
$n = \frac{60 \times 3}{20} = 9$ (ч).

Ответ: 9 ч.

Пропорции и рисунки в масштабе

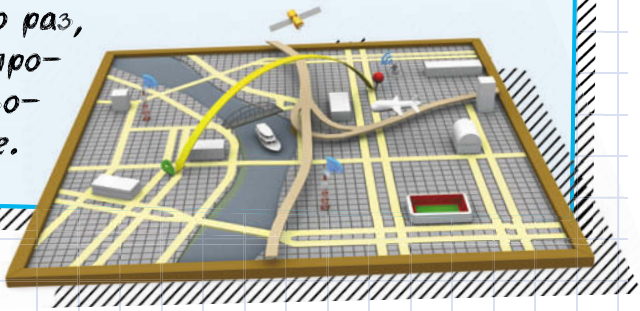
Отношение длины отрезка на карте к длине соответствующего отрезка на реальной местности называют **масштабом**.

Масштаб показывает, во сколько раз размеры объекта на чертеже уменьшены по отношению к его реальным размерам. Масштаб записывается следующим образом: 1 : 100, 1 : 500 и т. д.

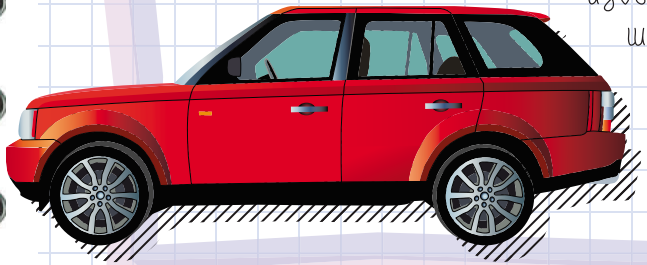


Это интересно

Совершенно очевидно, что ни один большой объект, например многоэтажный дом, дерево, машину, самолет, практически невозможно изобразить на бумаге в натуральную величину. Понимая это, даже в древние времена люди рисовали уменьшенные изображения различных объектов, большинство из которых весьма приближенно соответствовало оригиналам. А сейчас создать точную уменьшенную копию любого предмета не составляет никакого труда. Главное в создании уменьшенной копии — уменьшать все размеры в одинаковое количество раз, т. е. сохранять все пропорции и рисовать изображение в масштабе.



В реальной жизни длина автомобиля, допустим, 4 м, или 400 см, а на листе бумаги можно нарисовать его любой длины, например 4 см. То есть на бумаге можно уменьшить изображение в 100 раз! Масштаб в данном случае равен 1 : 100, что означает: в 1 см на бумаге содержится 100 см объекта в реальной жизни.



Проверьте себя и запишите ответ:

1. Что представляет собой отношение между числами?

2. Что такое пропорция?

3. Какая пропорция называется правильной?

4. Каково идеальное расстояние между глазами?

5. Кому принадлежит наиболее признанная теория идеального лица?

6. Что из себя представляет прямая пропорциональная зависимость?

7. Что из себя представляет обратная пропорциональная зависимость?

8. Сегодня известно 79 спутников Юпитера и 27 спутников Урана. Во сколько раз число спутников Юпитера больше, чем у Урана? Во сколько раз число спутников Урана меньше, чем у Юпитера?

9. Что такое правильная пропорция? Приведите пример.

10. Что такое неправильная пропорция? Приведите пример.

11. Какая из этих пропорций является неправильной? Укажите на ошибочный пример: $9 : 4 = 8 : 3$; $12 : 8 = 6 : 4$.

12. Автомобиль и поезд двигаются из одного города в другой. Города расположены на расстоянии 800 км друг от друга. Автомобиль едет со скоростью 80 км/ч и проходит этот путь за 10 часов. Поезд едет со скоростью 120 км/ч. Сколько времени ему понадобится, чтобы проделать тот же путь?

13. Чтобы приготовить 15 котлет, нужно 1000 грамм фарша. Сколько нужно фарша, чтобы приготовить 20 котлет?

14. Что такое масштаб?

15. На карте указан масштаб 1:100 000. Расшифруйте эту запись.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

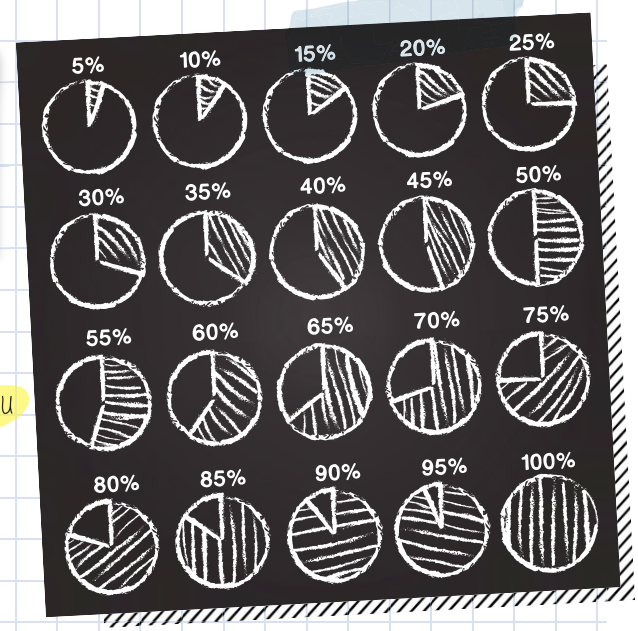
14.

15.

Проценты

Основные сведения

Процент – это **сотая** часть того числа, о котором идет речь.

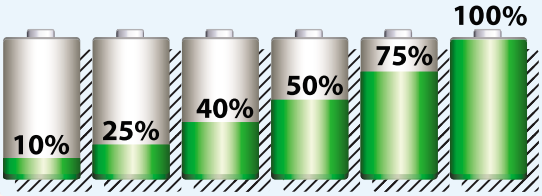


Процент записывается при помощи знака «%».

$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01.$

Это интересно

«Скидка 30%», «–50% на вторую покупку», «влажность 75%», «заряд батареи 25%», «концентрация соли в морской воде 5%»... Эти и подобные фразы не раз слышал каждый человек. Люди довольно часто используют проценты в повседневной жизни.



Чтобы наглядно изобразить, что такое процент, можно использовать таблицы.

Рассмотрите таблицы и обратите внимание, что в каждой из них по 100 ячеек.

В первой таблице из 100 закрашено только 10 ячеек, во второй – 30, а в третьей – всего 4.

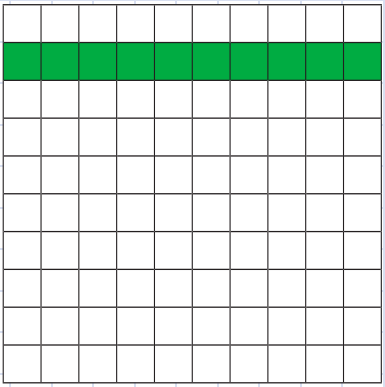


Таблица 1

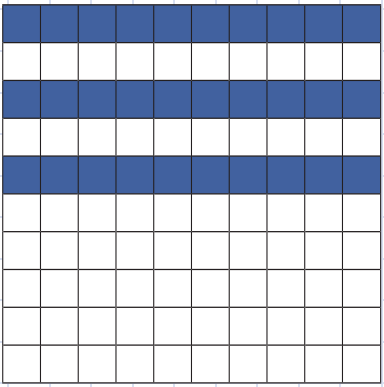


Таблица 2

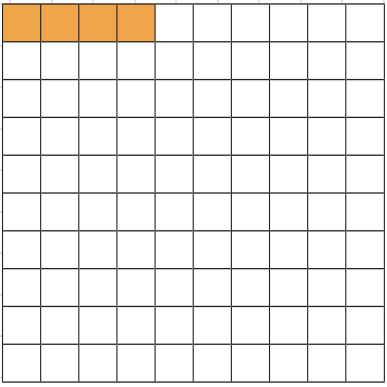


Таблица 3

В первой таблице 10% ячеек окрашено в зеленый цвет, т. е. 10 из 100. Во второй таблице в синий цвет окрашено 30 ячеек из 100, т. е. 30%, а в третьей всего 4 ячейки оранжевого цвета, т. е. 4%.

Рассмотрим несколько примеров, которые часто можно встретить в повседневной жизни.

1. Уровень заболеваемости гриппом вырос на 18%. Что означают эти цифры?

Увеличение уровня заболеваемости на 18% означает, что если раньше за какой-то период диагноз «грипп» ставили 100 людям, то теперь за этот же срок заболели уже 118 человек. Или раньше заболевали 200 человек, а теперь – 236.

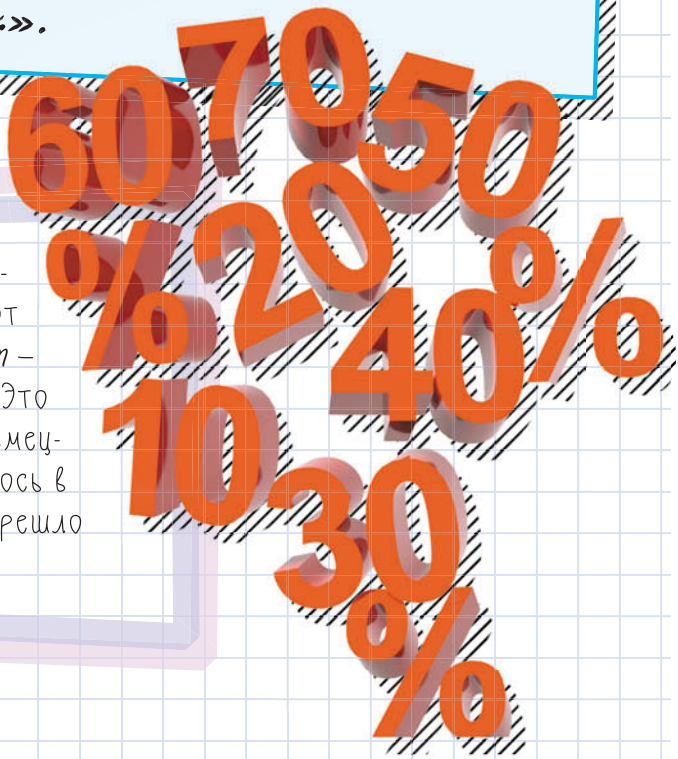
2. Надпись на этикетке «хлопок 100%» означает, что данный материал полностью состоит из хлопка.

3. Сметана 18%-ной жирности – это сметана, в которой $\frac{18}{100}$ массы составляет жир, или 18 г жира на каждые 100 г продукта.

Анализируя примеры выше, можно сказать, что если мы говорим о заболеваемости, то 1% – это сотая часть заболевших; если о содержании какого-либо вещества, то 1% – это сотая часть материала. Если имеется в виду цена, то 1% – это одна сотая часть цены и т. д.

Это интересно

Как появился знак «%»? Известны две версии появления этого знака. Согласно первой из них, знак произошел от итальянского слова cento («сто»), которое очень часто в текстах сокращали до cto, а затем и вовсе превратили букву t в наклонную черту, а c и o — в кружочки. По второй версии, знак «%» появился в результате ошибки наборщика. Слово cto он принял за дробь и вместо него напечатал знак «%». Так, в XVII в. во Франции вышло в свет «Руководство по коммерческой арифметике», где вместо слова cto появился новый знак — «%».



Само слово «процент» произошло от латинского *per centum* – «на сотню; сотая». Это словосочетание в немецком языке превратилось в *Prozent*, а оттуда перешло в русский.

Как перевести проценты в дробь и дробь в проценты?

Чтобы **перевести проценты в дробь**, необходимо выполнить следующие действия:

1. Убрать знак процента.
2. Разделить число на 100.

ПРИМЕРЫ

$3\% = \frac{3}{100} = 0{,}03$; $54\% = \frac{54}{100} = 0{,}54$;

$49{,}3\% = \frac{49{,}3}{100} = 0{,}493$; $0{,}8\% = \frac{0{,}8}{100} = 0{,}008$.

Чтобы **обыкновенную дробь перевести в проценты**, нужно:

1. Эту дробь представить в виде десятичной дроби.
2. Десятичную дробь умножить на 100.

ПРИМЕРЫ

$\frac{5}{8} = 0{,}625$; $0{,}625 \times 100 = 62{,}5\%$;

$\frac{4}{5} = 0{,}8$; $0{,}8 \times 100 = 80\%$;

$\frac{2}{8} = 0{,}25$; $0{,}25 \times 100 = 25\%$.

Важно!

Проценты связаны как с десятичными, так и с обыкновенными дробями. Поэтому нужно запомнить несколько равенств, которые в дальнейшем обязательно пригодятся!

Половина — это 50%, одна четверть — 25%, три четверти — 75%.

Для перевода процентов в дробь и дроби в проценты может пригодиться следующая таблица-подсказка:

дробь	1/2	1/4	3/4	1/5	2/5	3/5	1/10	1/20	1/50
десятичная дробь	0,5	0,25	0,75	0,2	0,4	0,6	0,1	0,05	0,02
проценты	50%	25%	75%	20%	40%	60%	10%	5%	2%

Переведите в проценты обыкновенные дроби:

$\frac{27}{448}$; $\frac{15}{670}$; $\frac{290}{1449}$; $\frac{89}{639}$.

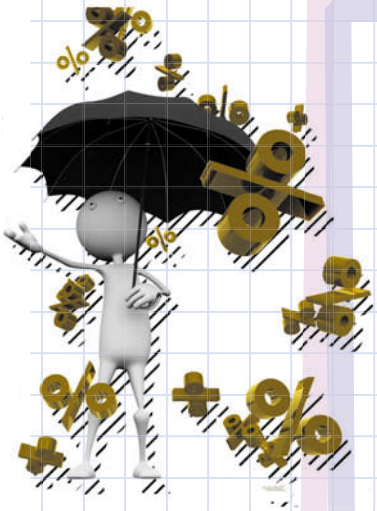
Действия с процентами

Как найти проценты от числа, число по его процентам или процентное соотношение чисел? Как увеличить или уменьшить число на определенное количество процентов?

Рассмотрим основные действия, которые можно выполнять с процентами.

Чтобы **найти процент от числа**, необходимо:

1. Перевести процент в десятичную дробь, т. е. разделить количество процентов на 100.
2. Известное число умножить на получившуюся дробь.



Приведем несколько примеров по нахождению процентов от числа.

ПРИМЕР 1

Найти 5% от 400.

1. 5% = 0,05;
2. 400 × 0,05 = 20.

ПРИМЕР 2

Найти 30% от 120.

1. 30% = 0,3;
2. 120 × 0,3 = 36.

ПРИМЕР 3

Найти 8% от 400.

1. 8% = 0,08;
2. 400 × 0,08 = 32.

ПРИМЕР 4

Найти 60% от 240.

1. 60% = 0,6;
2. 240 × 0,6 = 144.

Решим конкретную задачу:

В классе 30 учеников, 40% из них – девочки. Сколько девочек учится в классе?

Решение:

Представим 40% в виде десятичной дроби и известное число (30 учеников) умножим на полученную десятичную дробь:

$40\% = 0{,}4$;

$30 \times 0{,}4 = 12$.

Ответ: в классе учится 12 девочек.

Найдите 12% от 478.

Чтобы **найти число по его проценту**, необходимо:

1. Перевести процент в десятичную дробь, т. е. разделить количество процентов на 100.
2. Известное число разделить на получившуюся дробь.

Приведем несколько примеров по нахождению числа по его проценту.

ПРИМЕР 1

Найти число, 8% которого равны 24.

1. 8% = 0,08;
2. 24 : 0,08 = 300.

ПРИМЕР 2

Найти число, 15% которого равны 90.

1. 15% = 0,15;
2. 90 : 0,15 = 600.

ПРИМЕР 3

Найти число, 6% которого равны 12.

1. 6% = 0,06;
2. 12 : 0,06 = 200.

ПРИМЕР 4

Найти число, 30% которого равны 150.

1. 30% = 0,3;
2. 150 : 0,3 = 500.

Решим конкретную задачу:

На тренировке мальчик проплыл 75 м, что составляет 25% от расстояния, которое он обычно проплывает. Какое количество метров мальчик проплывает за одну тренировку?

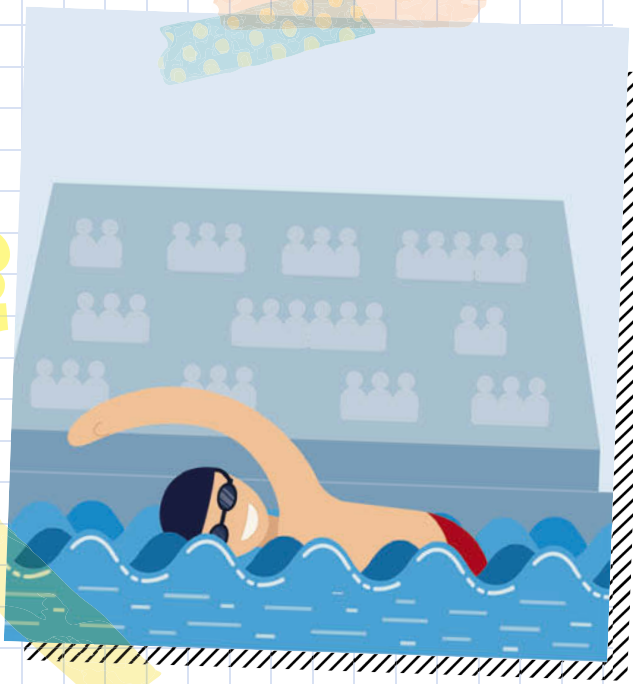
Решение:

Нам известно, что расстояние (75 м), которое мальчик проплыл во время тренировки, составляет 25% от всего расстояния, которое он обычно проплывает на тренировке. Проценты мы представляем в виде десятичной дроби, а затем известное число делим на десятичную дробь:

25% = 0,25;

75 : 0,25 = 300.

Ответ: 300 м.



Решите задачу:

На станке изготовили 2200 деталей, из которых 2% оказались бракованными. Сколько бракованных деталей было изготовлено?

Чтобы **найти процентное отношение двух чисел**, необходимо:

1. Найти частное этих чисел.
2. Полученное число перевести в проценты: умножить на 100.

Приведем несколько примеров по нахождению процентного отношения двух чисел.

ПРИМЕР 1

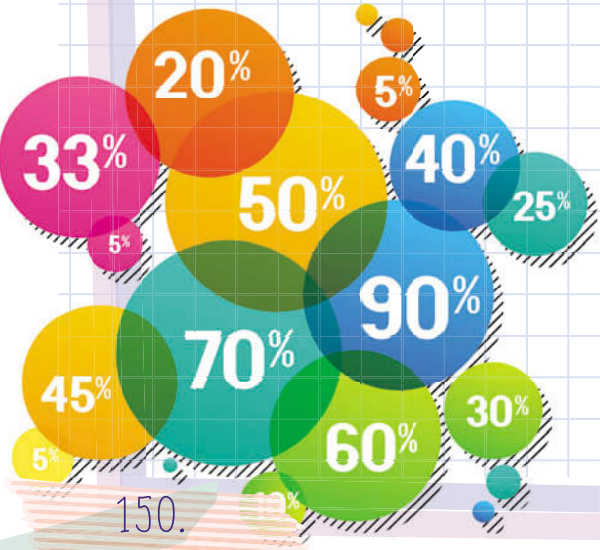
Сколько процентов от числа 120 составляет число 6?

1. $6 : 120 = 0{,}05$;
2. $0{,}05 \times 100 = 5\%$.

ПРИМЕР 2

Сколько процентов от числа 360 составляет число 90?

1. $90 : 360 = 0{,}25$;
2. $0{,}25 \times 100 = 25\%$.



ПРИМЕР 3

Сколько процентов от числа 120 составляет число 4?

1. $4 : 120 = 0{,}03$;
2. $0{,}03 \times 100\% = 3\%$.

ПРИМЕР 4

Сколько процентов от числа 250 составляет число 50?

1. $50 : 250 = 0{,}2$;
2. $0{,}2 \times 100\% = 20\%$.

Важно!

При решении задач на нахождение процентного отношения чисел нужно ту часть, о которой спрашивают, разделить на общее количество и умножить на 100.

Решим конкретную задачу:

Сколько процентов составляют 8 попаданий из 20 выстрелов?

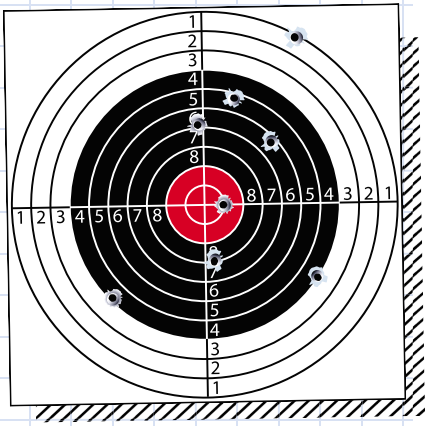
Решение:

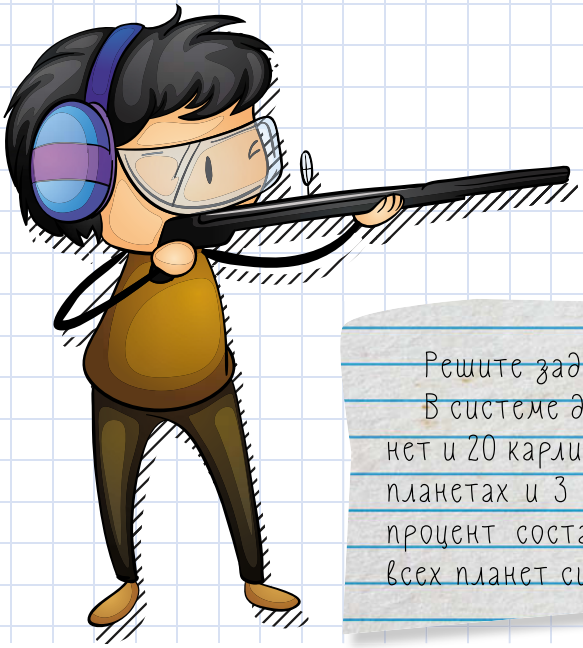
В задаче говорится о 8-ми попаданиях. Поэтому число попаданий делим на общее количество выстрелов, а результат умножаем на 100%:

$8 : 20 = 0{,}4;$

$0{,}4 \times 100\% = 40\%.$

Ответ: 8 попаданий составляют 40%.





Решите задачу:

В системе далекой звезды 12 больших планет и 20 карликовых планет. На двух больших планетах и 3 карликовых есть жизнь. Какой процент составляют планеты с жизнью от всех планет системы?

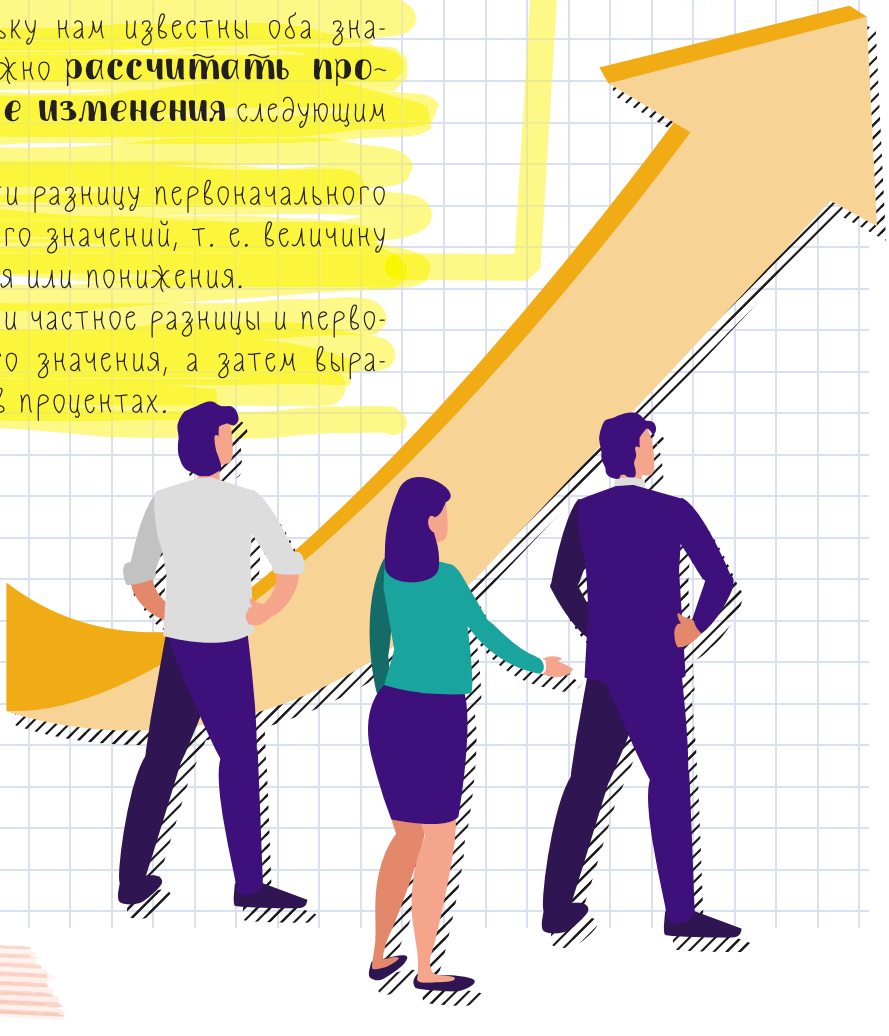
Как вычислить процентные изменения?

Процентные изменения являются показателем взаимосвязи между первоначальным значением и конечным, т. е. указывают на то, на сколько процентов первоначальное значение больше или меньше конечного.

Поскольку нам известны оба значения, можно **рассчитать процентные изменения** следующим образом:

1. Найти разницу первоначального и конечного значений, т. е. величину повышения или понижения.

2. Найти частное разницы и первоначального значения, а затем выразить его в процентах.



Найдем **процент повышения**.

ПРИМЕР 1

На сколько процентов увеличилось число 4, если его увеличили в 4 раза?

1. Вычислим конечное число: $4 \times 4 = 16$.

2. Для того чтобы узнать, на сколько конечное число больше первоначального, нужно найти их разницу (из конечного значения вычесть первоначальное):

$16 - 4 = 12$.

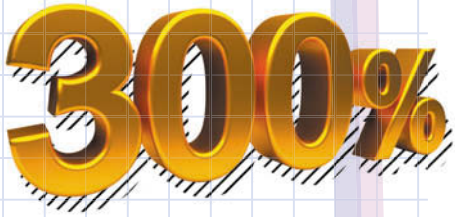
3. Разницу разделить на первоначальное число:

$12 : 4 = 3$.

4. Частное умножаем на 100:

$3 \times 100 = 300$.

Ответ: число 4 увеличилось на 300%.



ПРИМЕР 2

На сколько процентов увеличилось число 5, если конечное число 10?

1. Нужно найти разницу чисел: из конечного значения вычесть первоначальное:

$10 - 5 = 5$.

2. Разницу разделить на первоначальное число:

$5 : 5 = 1$.

3. Частное умножить на 100:

$1 \times 100 = 100$.

Ответ: число 5 увеличилось на 100%.

Найдем **процент понижения**.

ПРИМЕР 1

Число 12 уменьшили в 4 раза. На сколько процентов уменьшили число?

1. Вычислим конечное число: 12 : 4 = 3.
2. Для того чтобы узнать, на сколько конечное число меньше первоначального, нужно найти их разницу – из первоначального значения вычесть конечное:
   12 – 3 = 9.
3. Разницу разделить на первоначальное число:
   9 : 12 = 0,75.
4. Частное умножить на 100:
   0,75 × 100 = 75.

Ответ: число 12 уменьшили на 75%.

ПРИМЕР 2

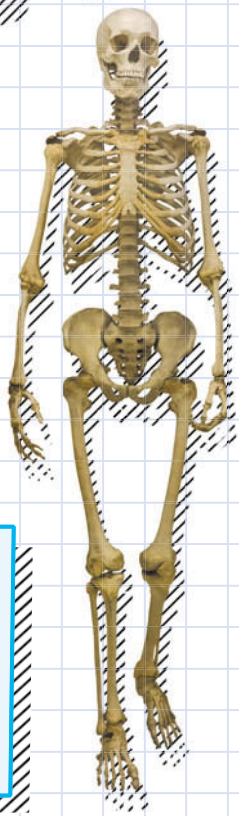
На сколько процентов уменьшили число 10, если конечное число 5?

1. Для того чтобы узнать, на сколько конечное число меньше первоначального, нужно найти их разницу – из первоначального значения вычесть конечное:
   10 – 5 = 5.
2. Разницу разделить на первоначальное число:
   5 : 10 = 0,5.
3. Частное умножить на 100:
   0,5 × 100 = 50.

Ответ: число 10 уменьшили на 50%.

Важно!

Для того чтобы представить изменения показателей, которые сами исчисляются в процентах, используют не проценты от первоначального показателя, а так называемые «процентные пункты», выражающие разность нового и старого значений показателя. Например, если в какой-либо стране индекс деловой активности вырос с 50% до 52%, то он изменился на 4% (проверить вы можете сами), а в процентных пунктах увеличился на 2 (52 – 50).



Это интересно

Самая длинная кость в теле человека — бедренная. Обычно ее длина составляет 27,5% от роста взрослого человека.

На сколько процентов уменьшили число 250, если конечное число 15?

На сколько процентов увеличили число 300, если конечное число 370?

Чтобы **увеличить число на определенный процент**, нужно:

1. Этот процент перевести в десятичную дробь.
2. Прибавить к десятичной дроби единицу.
3. Исходное число умножить на полученную дробь.

Например: увеличим число 120 на 80%:

1. Переводим процент в десятичную дробь: 80% = 0,8.
2. К десятичной дроби прибавляем 1: 0,8 + 1 = 1,8.
3. Исходное число умножаем на полученную дробь: 120 × 1,8 = 216.

Важно!

Алгоритм увеличения числа на определенный процент можно представить в виде следующей формулы:

$$a \times \left(1 + \frac{x}{100}\right),$$

где a — исходное число, x — количество процентов.

Воспользуемся этой формулой, чтобы решить приведенный выше пример: $a = 120$, $x = 80\%$.

$$120 \times \left(1 + \frac{80}{100}\right) = 120 \times (1 + 0{,}8) = 120 \times 1{,}8 = 216.$$

Чтобы **уменьшить число на определенный процент**, нужно:

1. Этот процент перевести в десятичную дробь.
2. Из единицы вычесть полученную десятичную дробь.
3. Исходное число умножить на полученную дробь.

Например: уменьшим число 120 на 80%:

1. Переводим процент в десятичную дробь: 80% = 0,8.
2. Из 1 вычитаем десятичную дробь: 1 – 0,8 = 0,2.
3. Исходное число умножаем на полученную дробь: 120 × 0,2 = 24.

Важно!

Алгоритм уменьшения числа на определенный процент можно представить в виде следующей формулы:

$$a \times \left(1 - \frac{x}{100}\right),$$

где a — исходное число, x — количество процентов.

Воспользуемся формулой для решения приведенного выше примера: $a = 120$, $x = 80\%$.

$$120 \times \left(1 - \frac{80}{100}\right) = 120 \times (1 - 0{,}8) = 120 \times 0{,}2 = 24.$$

Подсчет процентов с помощью пропорции

Рассчитать проценты от числа, найти число по его процентам или процентное соотношение чисел, вычислить увеличение или уменьшение на определенный процент можно при помощи правила пропорции.

Вспомним основное правило: чтобы решить пропорцию, перемножаем известные члены по диагонали, а затем получившийся результат делим на оставшееся число.

Нахождение **процента от числа** с помощью пропорции.

Пропорция

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

ПРИМЕР

Найдем 14% от числа 700.

Так как необходимо найти определенный процент от числа 700, то принимаем это число за 100%. Составляем пропорцию:

100% – 700,

14% – a.

А сейчас самый важный момент! Для решения пропорции рисуем букву Z, начиная от a, т. е. перемножаем по диагонали и делим на 100:

$a = 14 \times 700 : 100 = 98$.

Ответ: 98.

Нахождение **числа по известному проценту** с помощью пропорции.

ПРИМЕР

Найдем число, 8% от которого равно 30.

Составляем пропорцию:

8% – 30,

100% – a.

Снова рисуем букву Z, начиная от a, и выполняем вычисления:

$a = 100 \times 30 : 8 = 375$.

Ответ: 375.

Найдем **процентное отношение** с помощью пропорции.

ПРИМЕР

Сколько процентов от числа 120 составляет число 48?

Известно, что 120 – это все число, т. е. 100%. Составляем пропорцию:

120 – 100%,

48 – a.

Рисуем букву Z, начиная от a, и выполняем вычисления:

$a = 48 \times 100 : 120 = 40$.

Ответ: 40%.

Найдите число, составляющее 15 процентов от числа 698.

Вычислите, сколько процентов от числа 450 составляет число 439.

Приведем пример **увеличения на определенный процент** с помощью пропорции.

ПРИМЕР

Увеличим число 55 на 60%.

Поскольку речь идет об увеличении, то к 60% мы прибавляем 100% (так же, как в случае десятичных дробей мы прибавляли единицу), а число 55 принимаем за 100%.

Составляем пропорцию:

55 – 100%,

a – 160%.

Рисуем букву Z в обратную сторону – S, начиная от a, и выполняем вычисления:

$a = 160 \times 55 : 100 = 88$.

Ответ: если увеличить число 55 на 60%, получится 88.

Приведем пример **уменьшения на определенный процент** с помощью пропорции.

Пример

Уменьшим число 55 на 60%.

Поскольку речь идет об уменьшении, то из 100% вычтем 60% (так же, как в случае десятичных дробей мы вычитали из единицы), а число 55 принимаем за 100%.

Составляем пропорцию:

55 – 100%,

a – 40%.

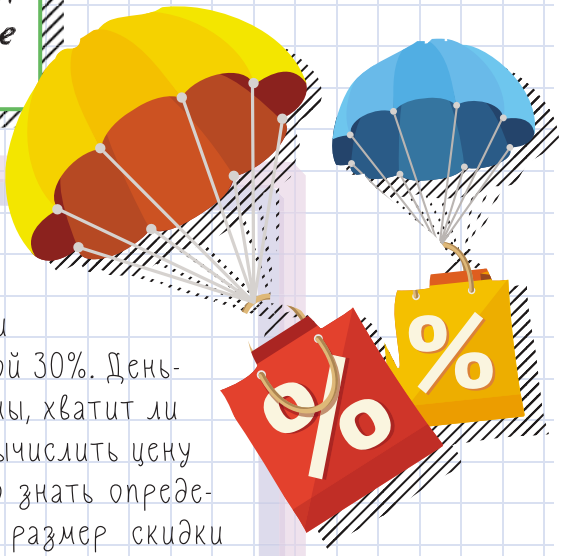
Рисуем букву Z в обратную сторону – S, начиная от a, и выполняем вычисления:

$a = 40 \times 55 : 100 = 22$.

Ответ: если уменьшить число 55 на 60%, получится 22.

Важно!

Скидка — это сумма, на которую снижается цена товара или услуги. Как правило, скидку указывают в процентах. И умение быстро посчитать, насколько выгоднее можно купить тот или иной товар, будет отнюдь не лишним!



Представьте, что вы узнали, что в магазине именно сегодня продаются книги и компьютерные игры со скидкой 30%. Деньги у вас есть, но вы не уверены, хватит ли имеющейся суммы. А чтобы вычислить цену игры с учетом скидки, нужно знать определенные правила: посчитать размер скидки (цену товара умножить на указанный процент скидки) и вычесть эту сумму из цены товара.

Как быстро подсчитать скидку 10%, 20%, 25%, 50% или 75%?
10%: разделить цену товара на 10.
20%: разделить цену товара на 5.
25%: разделить цену товара на 4.
50%: разделить цену товара на 2.
75%: разделить цену товара на 4 и частное умножить на 3.

Проверьте себя и запишите ответ:

1. В каком веке появился знак %?

2. Пусть в прошлом году вашу школу закончили 110 человек, а в этом 130. На сколько процентов увеличилось число выпускников?

3. В 1804 г. население Земли составляло 1 млрд человек, в 1927 г. – 2 млрд, в 1960 г. – 3 млрд, в 1974 г. – 4 млрд, в 1987 г. – 5 млрд, в 1999 г. – 6 млрд, в 2011 г. – 7 млрд человек. Подсчитайте, на сколько процентов увеличилось население нашей планеты с 1804 г. по 1927 г. и с 1927 г по 2011 г.

4. Переведите в десятичные дроби следующие величины: 23%; 17%; 98%; 0,7%; 20,8%; 67,2%; 83%.

5. Переведите обыкновенные дроби в проценты: $\frac{4}{9}$, $\frac{9}{14}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{12}{25}$, $\frac{11}{18}$, $\frac{45}{98}$, $\frac{21}{29}$.

6. На сколько процентов увеличилось число 51, если его увеличили в 6 раз?

7. На сколько процентов уменьшилось число 87, если его уменьшили в 3 раза?

8. Найдите число, 7% от которого составляют 345.

9. Найдите число, 9% от которого составляют 17.

10. Увеличьте число 359 на 25%.

11. Уменьшите число 372 на 12%.

12. В студенческой группе 25 человек. Из них 5 лыжников, 3 футболиста и еще четверо играют в ансамбле. Все эти люди – разные, никто не занимается сразу двумя делами. Какой процент составляют спортсмены? Какой процент составляют лыжники, а какой – футболисты? Какой процент составляют музыканты?

13. Цена одной книги – 1272 рубля. Скидка на нее составила 20%. Цена второй книги 890 рублей. Скидка на нее составила 12%. Сколько денег вы сэкономите, если купите обе книги по скидкам.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

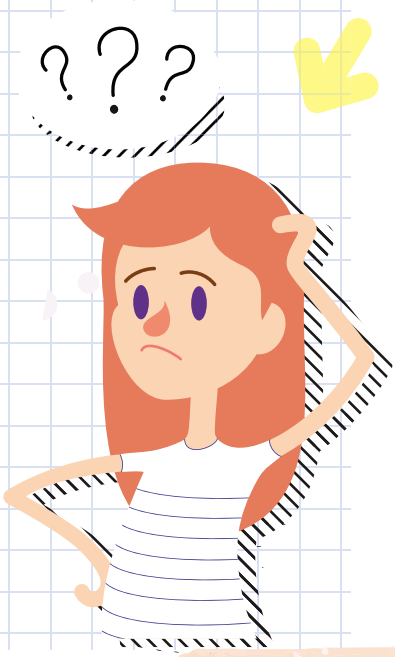
9.

10.

11.

12.

13.



Алгебра

Общие сведения

Алгебра – раздел математики, в котором числа и другие математические объекты обозначаются буквами и другими символами. Это позволяет записывать и изучать их свойства в общем виде. Элементарная алгебра изучает свойства операций с вещественными (действительными) числами. Она включает правила преобразования алгебраических выражений и уравнений с использованием буквенных символов.

Благодаря алгебре можно ввести понятия **неизвестного**, **уравнения**, **переменного** и **функции**.

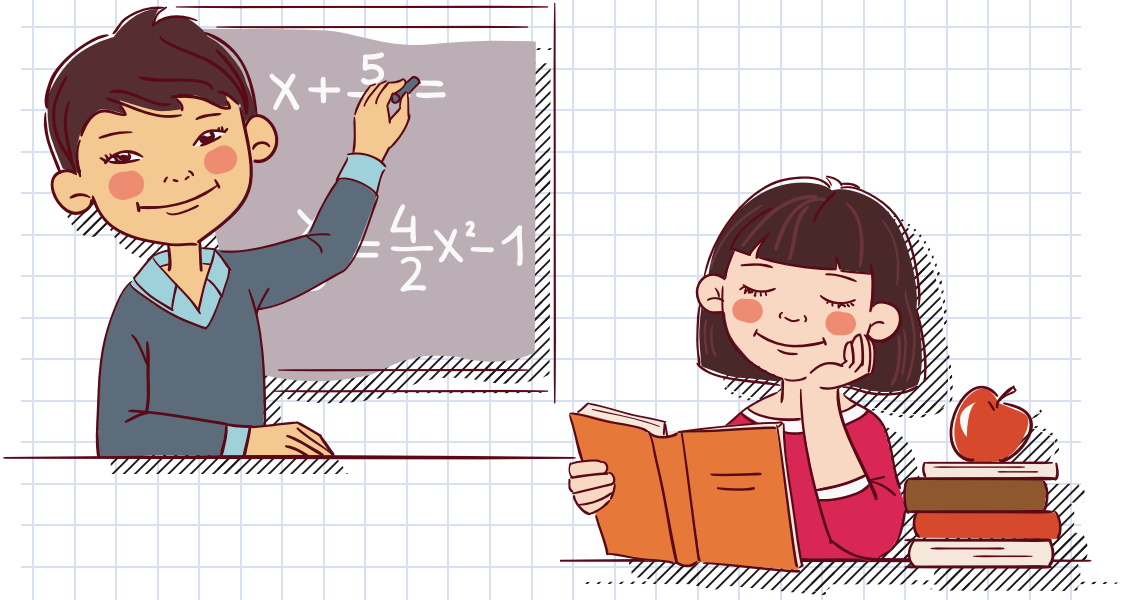
Это интересно

Считается, что алгебра появилась в 830 г., когда науки особенно сильно развивались в арабском мире. Тогда математик и астроном Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми написал книгу, которой дал название «Китаб Аль-Джабр в'аль Мукабала», что в примерном переводе означает «Восстановление и упрощение». В ней ученый изглагал стандартные способы приведения уравнений к виду, удобному для их решения. От «аль-джабр» происходит современное слово «алгебра».

В трудах ученых Востока из алгебры сформировалась самостоятельная область математики, которая занимается решением уравнений – первой степени (линейных) и квадратных.

Важно!

Кроме элементарной алгебры, имеется также линейная алгебра, общая алгебра, универсальная алгебра и алгебраическая комбинаторика.



Уравнения

Уравнение – это **равенство**, содержащее **неизвестную величину**, значение которой надо найти.

В уравнениях неизвестное обычно обозначается строчной латинской буквой. Чаще всего это буквы «*x*» (икс) и «*y*» (игрек).

Важно!

Вы уже знакомились с уравнениями в виде пропорций, когда находили неизвестный член пропорции, зная три других, и умеете решать подобные уравнения.

Корень уравнения – это значение буквы, при котором при решении уравнения получается верное числовое равенство. Решить уравнение – значит найти все его корни или показать, что корней не существует.

Чтобы найти **неизвестное слагаемое**, надо от суммы отнять известное слагаемое.

ПРИМЕР

$x + 12 = 27;$
$x = 27 - 12 = 15.$

Чтобы найти **неизвестное уменьшаемое**, надо к разности прибавить вычитаемое.

ПРИМЕР

$x - 12 = 3;$
$x = 3 + 12 = 15.$

Степень уравнения определяется по наибольшей степени, в которой стоит неизвестное.

Если это степень 2, значит речь идет о квадратном уравнении. Если это степень три, то уравнение кубическое.

Общий вид квадратного уравнения выглядит так:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где буквенные коэффициенты a, b и c могут означать любые числа, а x – неизвестную величину, значения которой требуется найти.

1. «a» – первый или старший коэффициент;
2. «b» – второй коэффициент;
3. «c» – свободный член.

Чтобы **решить квадратное уравнение**, следует:

1. Привести квадратное уравнение к общему виду «$ax^2 + bx + c = 0$». То есть в правой части должен остаться «0».
2. Использовать формулу для корней:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Решите квадратное уравнение:
$3x^2 - 14x - 5 = 0.$

Системы уравнений

Системой уравнений называют два уравнения с двумя неизвестными (чаще всего неизвестные в них называют «x» и «y»), которые объединены в общую систему фигурной скобкой.

Чтобы **решить систему уравнений**, требуется найти x и y.

ПРИМЕР

$$\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

Способ подстановки для решения системы уравнений.

1. Выразим x через y с помощью первого уравнения.

$x = 7 - 5y$.

2. Подставим полученное выражение вместо x во второе уравнение:

$3(7 - 5y) - 2y = 4$.

Мы получили обычное линейное уравнение.

3. Находим y:

$21 - 15y - 2y = 4$;

$21 - 4 = 15y + 2y$;

$17 = 17y$;

$y = 1$.

4. Подставляем $y = 1$ вместо x:

$x = 7 - 5y$;

$x = 7 - 5 \times 1 = 7 - 5 = 2$;

$x = 2$.

Важно!

Чтобы выразить неизвестное, следует выполнить два условия:

1. Перенести неизвестное в левую часть уравнения;

2. Разделить и левую и правую части уравнения на нужное число так, чтобы коэффициент при неизвестном оказался равным единице.

Способ решения системы уравнений **методом сложения**.

$$\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

1. Попробуем сложить уравнения:

$x + 5y + 3x - 2y = 11$;

$4x + 3y = 11$.

Но в уравнении по-прежнему осталось два неизвестных. Попробуем по-другому.

2. Чтобы при сложении неизвестное «x» сократилось, надо сделать так, чтобы в первом уравнении при «x» стоял коэффициент «-3».

3. Для этого умножим первое уравнение на «-3»:

$x \times (-3) + 5y \times (-3) = 7 \times (-3)$;

$-3x - 15y = -21$.

4. Сложим уравнения:

$-3x - 15y + 3x - 2y = -21 + 4$;

$-17y = -17$;

$y = 1$.

5. Подставляем $y = 1$ вместо x:

$x = 7 - 5y$;

$x = 7 - 5 \times 1 = 7 - 5 = 2$;

$x = 2$.

Функции

Величина y является функцией некоторой другой величины x, если каждое значение x определяет некоторое значение y. Эту зависимость записывают как $y = f(x)$, где x именуется независимой переменной, или **аргументом** функции, а y – зависимой переменной, или **значением** функции.

Для каждого x функция имеет единственное значение $f(x)$, но совсем не обязательно, чтобы каждому $f(x)$ отвечало единственное x. Простейший тому пример – функция $y = x^2$, каждому значению которой, кроме $y = 0$, отвечают два значения аргумента.

Элементарные функции – это многочлен, степенная функция, тригонометрическая функция, обратная тригонометрическая функция, показательная функция.

Это интересно

В мире, где мы живем, все тесно взаимосвязано. Иными словами, взаимозависимо: каждое «что-то» определяется «чем-то» другим. Скажем, рост ребенка зависит от его возраста, т. е. от одного фактора — времени. А его успеваемость — от усердия и способностей, т. е. уже от двух факторов. И если эти два фактора нельзя выразить с помощью чисел (ну, может быть, через IQ — коэффициент интеллектуальности), то время имеет числовое выражение. Поэтому рост, который меняется со временем, называют функцией времени.

Давление воздуха t в 1 атмосферу зависит от высоты h над поверхностью Земли:

$$t = f(h).$$

Количество простых чисел, которое определяется по формуле:

$$f(n) = n^2 - n + 41,$$

где n – натуральное число, есть функция этого числа.

Объем газа V, заключенного в цилиндр, есть функция температуры T и давления p, оказываемого на поршень:

$$V = f(T, p),$$

таким образом, объем является функцией не одной, а двух переменных.

Положение малого физического тела (материальной точки) в пространстве определяется числовыми значениями трех его координат и, следовательно, будет функцией трех переменных (x, y, z).

Важно!

Функция может зависеть как от одной переменной, так и от нескольких.

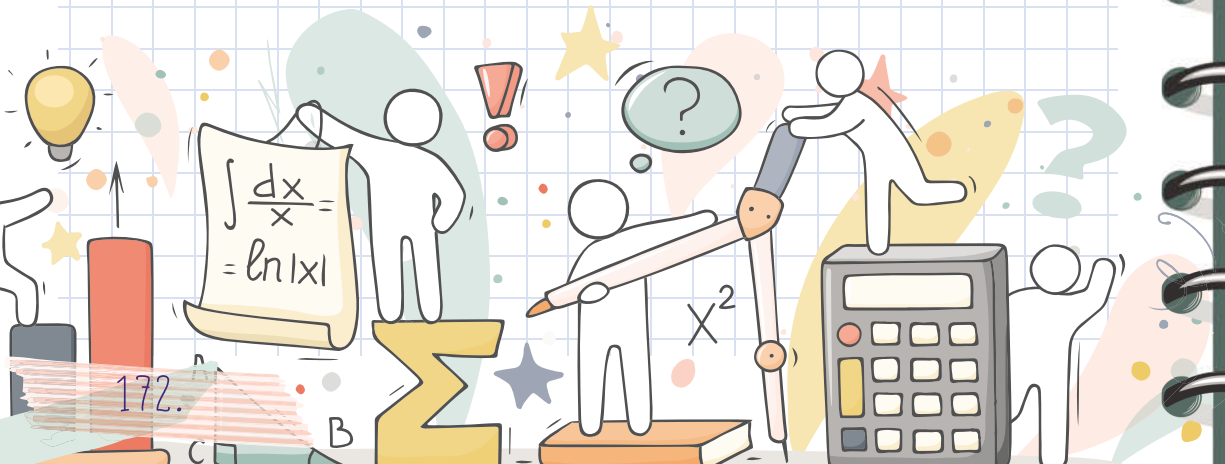
Важно!

Множество всех возможных значений аргумента называют областью определения функции. А то множество значений функции, которое она принимает, когда аргумент «пробегает» всю область определения, именуется областью ее значений.

Проверьте себя и запишите ответ:

1. Когда возникла алгебра?
2. Что такое уравнение?
3. Что называется коэффициентом уравнения?
4. Что такое функция?
5. Что называется аргументом функции?
6. Назовите элементарные функции.
7. Решите уравнение $|x + 2| = 2x(3 - x)$.
8. Решите уравнение $-2x = 10$.
9. Решите уравнение $16x = 32$.
10. Решите уравнение $25x - 1 = 9$.
11. Решите уравнение $45x - 4 = 1$.
12. Решите квадратное уравнение $x^2 - 8x + 12 = 0$.
13. Решите квадратное уравнение $x^2 - 4x + 6 = 0$.
14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 4x + 8y = 16. \end{cases}$$



1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

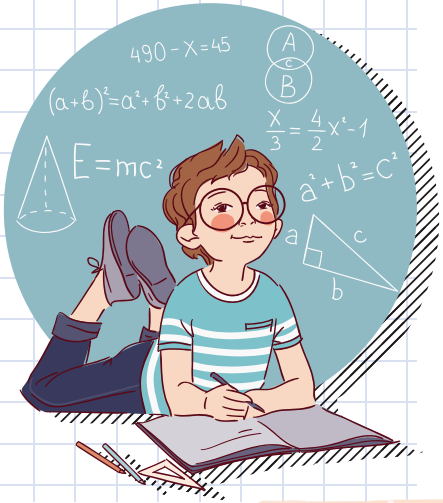
10.

11.

12.

13.

14.



Основы геометрии

История геометрии

Геометрия – это раздел математики, изучающий **фигуры** и их свойства.

Человек давно начал познавать мир, ощупывая и рассматривая окружающие его предметы. Таким образом он получал сведения о форме и размерах – главных понятиях геометрии. Еще в древние времена Евклидом были сформулированы основные понятия геометрии.

Это интересно

В 332 г. до н. э. Александр Македонский покорил Египет. Чтобы закрепить свою власть над этой страной, Александр провозгласил себя фараоном. Заодно он решил построить там город, назвав его собственным именем — Александрия. После смерти Александра соратники разделили его империю. Царем Египта стал Птолемей. Он основал в Александрии академию (Мусейон), где в течение многих веков собирались выдающиеся ученые. Одним из таких ученых был Евклид — один из наиболее знаменитых математиков в истории.

Важно!

О жизни Евклида сохранилось мало сведений, расцвет его деятельности относится примерно к 300 г. до н. э, куда больше мы знаем о его трудах. На протяжении многих столетий слова «математика» и «Евклид» воспринимались европейцами практически как синонимы. Не следует думать, что Евклид сам открыл все математические истины, которые встречаются на страницах его книг. На самом деле он собрал воедино и упорядочил значительную часть математических знаний древних греков. Предшественники Евклида — Фалес, Платон, Пифагор, Аристотель и др. — много сделали для развития геометрии. Но все это были отдельные фрагменты, а не единая логическая схема. Целью Евклида было построить систему так, чтобы в ней не оставалось места для неоправданных допущений, основанных на угадывании, интуиции или приблизительности. То есть он заимствовал результаты у предшественников, дополнил своими достижениями и оставил все это богатство последователям.

Евклид. Фрагмент картины художника Юстуса ван Гента. XV в.

Главная работа Евклида «**Начала**» в основном содержит изложение геометрии. Кроме того, в ней рассмотрен ряд вопросов теории чисел и некоторые разделы алгебры, которые, правда, все изложены с геометрических позиций. За время существования труда, вплоть до XX в., было продано больше его экземпляров, чем Библии.

Книга I «Начала» посвящена учению о треугольниках, параллелограммах и многоугольниках.

Книга II посвящена так называемой геометрической алгебре.

В книге III рассматриваются окружности и их свойства.

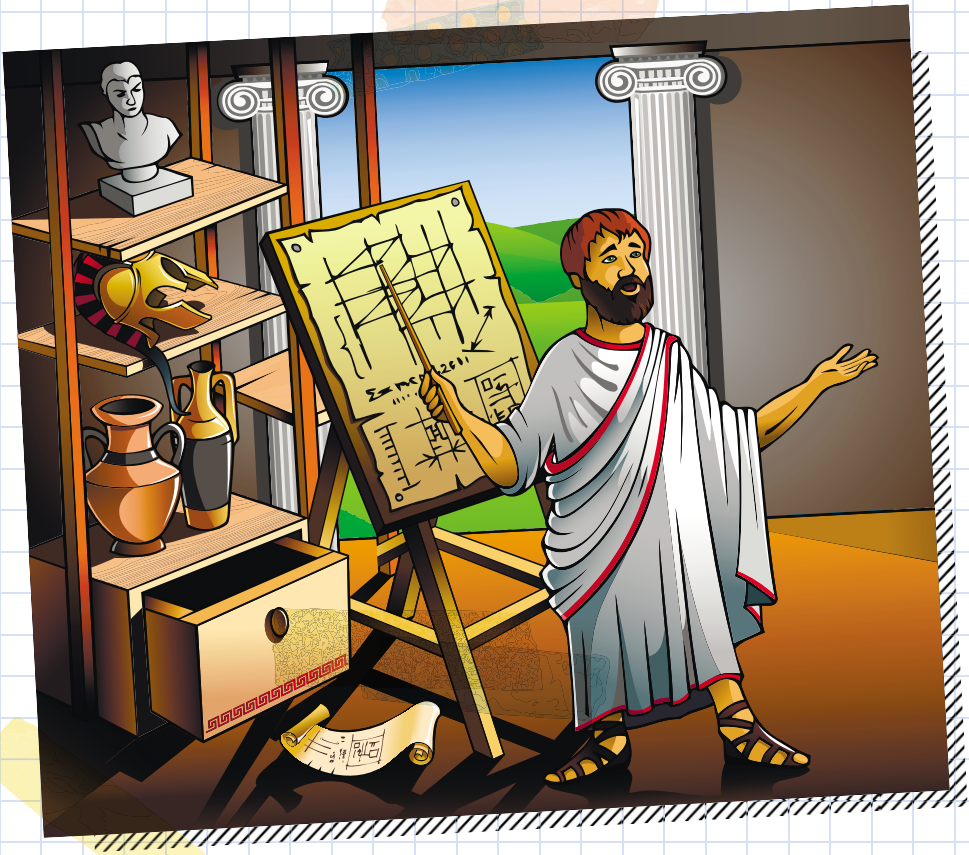
В книге IV речь идет о многоугольниках, вписанных в окружность или описанных около нее.

V книга рассматривает общую теорию отношений, разработанную Евдоксом Книдским.

Книга VI содержит учение о подобии треугольников и многоугольников.

VII, VIII и IX книги посвящены теоретической арифметике. Евклид рассматривает исключительно натуральные числа; он говорит, что «число есть совокупность единиц». Он излагает в этих книгах теорию делимости и пропорций, доказывает бесконечность множества простых чисел, приводит алгоритм для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел, строит четные совершенные числа. Евклид доказывает также формулу для суммы геометрической прогрессии.

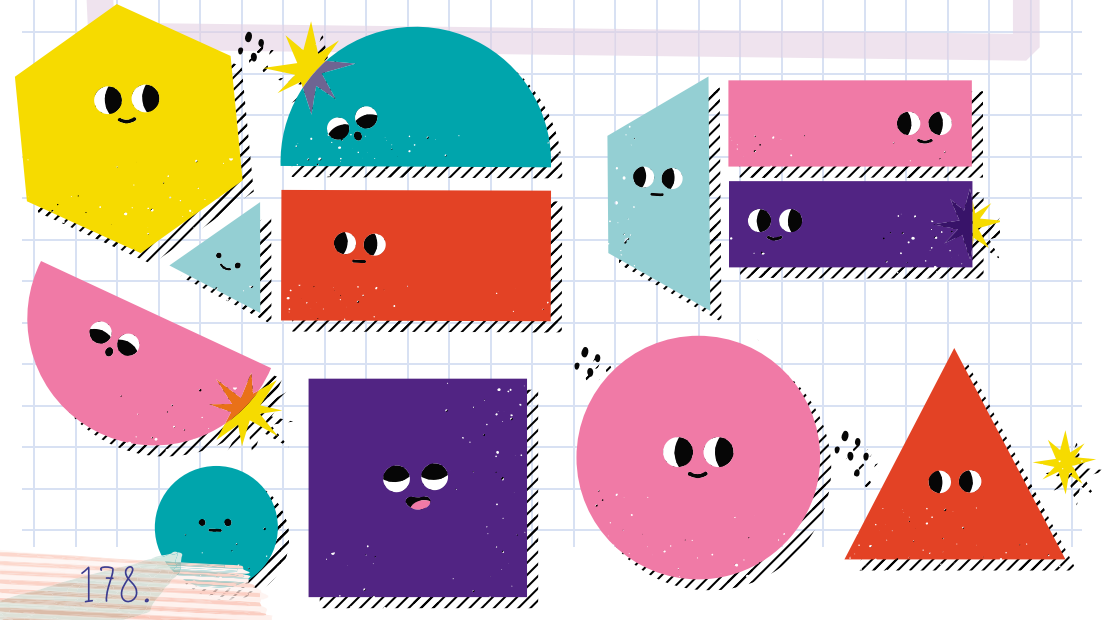
Книги XI–XX отведены стереометрии. Во всех этих книгах содержатся доказательства 465 теорем, исчерпывающих практически все геометрическое знание того времени.



Евклид дал определения точке, линии (прямой или искривленной), окружности, прямому углу, плоскости и поверхности. Некоторые понятия он определил довольно точно.

Линия, по Евклиду, – это «длина без ширины, края же линии – точки». Современным языком, линия – это объект, имеющий одно пространственное измерение.

«**Параллельные прямые**, – писал Евклид, – это прямые линии, которые, находясь на одной плоскости, продолженные до бесконечности в обоих направлениях, ни в одном из этих направлений не пересекаются».



Окружность, по Евклиду, есть «плоская фигура, обозначенная одной линией (кривой) так, что все прямые линии, пересекающие ее и еще одну из точек внутри нее, называемую центром, равны друг другу».

О **прямом угле** Евклид говорит так: «Когда прямая линия пересекает другую прямую линию, а образующиеся соседние углы равны друг другу, любой из этих углов прямой».

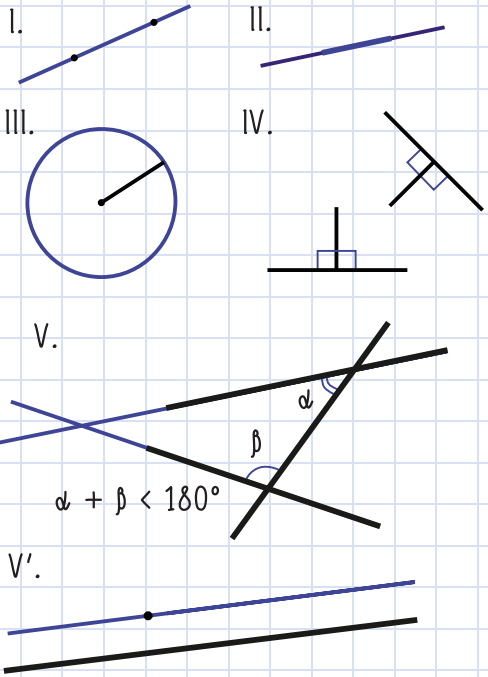
Это интересно

Один из учеников Евклида спросил его, какова будет его выгода от изучения геометрии. Евклид позвал раба со словами: «Дай этому человеку три обола, раз он хочет извлечь прибыль из учебы». (Обол — древнегреческая серебряная монета.)

Вот известные **постулаты Евклида**, данные в его «Началах»:

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
3. Из всякого центра всяким радиусом может быть описан круг.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых углов, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых углов.

Под ограниченной прямой Евклид понимал отрезок.



Постулаты Евклида в наглядном виде. Пятый постулат дается в двух формулировках (вторая следует из первой).

Важно!

Часто вместо пятого постулата используют эквивалентную ему аксиому параллельных: через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающуюся с данной. Отсюда делается вывод, что параллельные прямые не пересекаются.

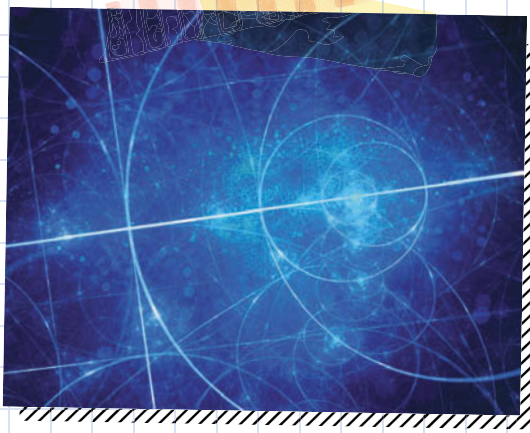
На основе логических построений, опираясь на свои постулаты и аксиомы, Евклид получил ряд важных результатов:

1. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон (это утверждение мы знаем как теорему Пифагора).
2. Любой угол можно точно разделить на две равные части, используя только циркуль и линейку.
3. Можно построить правильные многоугольники с 3, 4, 5, 6, 8, 10 и 12 сторонами, используя только циркуль и линейку.
4. Имеется ровно пять правильных тел: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

Здесь эти теоремы изложены на современном языке. Но язык Евклида сильно отличался: он не работал непосредственно с числами. Все, что мы интерпретируем как свойства чисел, формулируется у него в терминах длин, площадей и объемов.

Важно!

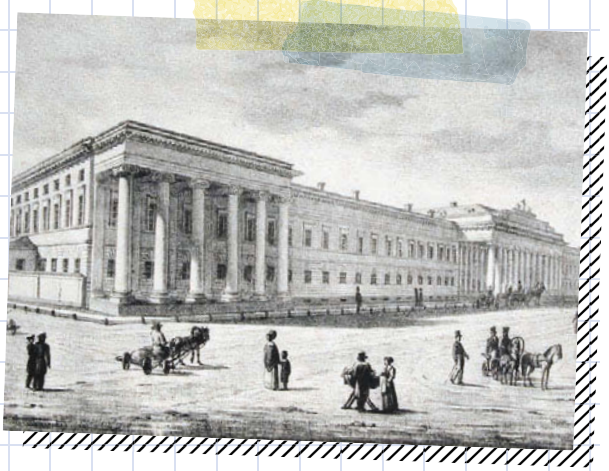
Теорема — математическое утверждение, истинность которого установлена путем доказательства на основе аксиом и других, ранее доказанных теорем.



Вернемся к пятому постулату Евклида, который, в отличие от первых четырех, длинный и сложный, и утверждаемое в нем не так очевидно. Евклид определяет требование, чтобы при пересечении двух линий третьей первые две пересекались с той стороны, где два образованных угла дают в сумме величину, меньшую суммы двух прямых углов. Оказывается, что это предположение логически эквивалентно такому: существует только одна линия, параллельная заданной линии и проходящая через заданную точку вне этой линии.

Поскольку пятый постулат Евклида не выглядит очевидным, его много раз пытались доказать, как теорему. Из этих попыток выросли новые – **неевклидовы** – геометрии.

В XIX в. ученые смогли построить такую геометрию, где пятый постулат отличался от Евклидова. Над этим работали и Карл Гаусс, и Янош Бояи, но первопроходцем стал Николай Иванович Лобачевский, который в 1829 г. опубликовал свои «Начала геометрии». Он оставил первые четыре постулата, но заменил пятый.



Казанский университет в 1830-е гг. Н. И. Лобачевский был ректором этого университета в 1827–1846 гг.

Важно!

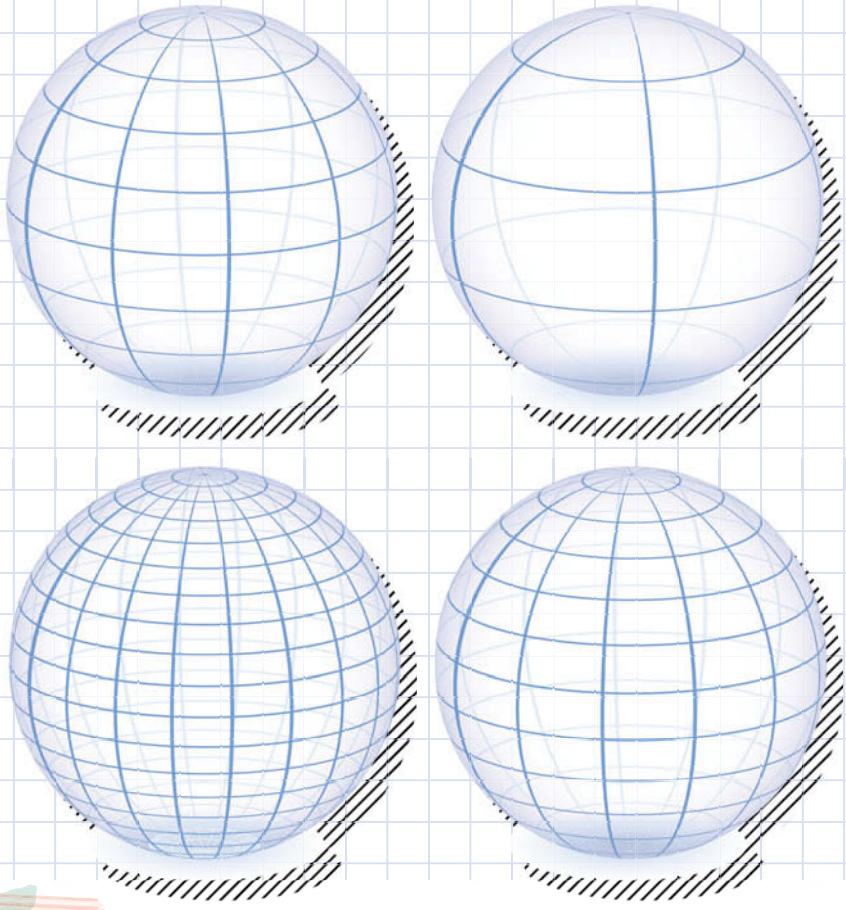
Пятый постулат Лобачевского утверждает, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие ее, в то время как в евклидовой геометрии через точку можно провести только одну прямую.

Это интересно

Иногда думают, что в геометрии Лобачевского две параллельные прямые пересекаются, но это нет так. Более того, в неевклидовой геометрии ничего не говорится о параллельных прямых, а только о непересекающихся. Дело в том, что пространство, в котором действует геометрия Лобачевского, обладает отрицательной кривизной. Такое пространство можно вообразить, если представить себе геометрические тела, похожие на воронку и седло. Неевклидова геометрия, в отличие от евклидовой, реализуется в искривленном пространстве. А ведь сейчас считается, что кривизной обладает пространство нашей Вселенной. Связана неевклидова геометрия и с теорией относительности Эйнштейна. А евклидова геометрия тоже верна, но является ее частным случаем.

Важно!

В науке известны три великих геометрии — Евклида, Лобачевского и Римана. Геометрия Римана реализуется на сфере, и там все прямые пересекаются. Но их при этом нельзя назвать параллельными. Дело в том, что параллельные прямые не пересекаются ни в одной геометрии согласно самому своему определению.



Системы координат

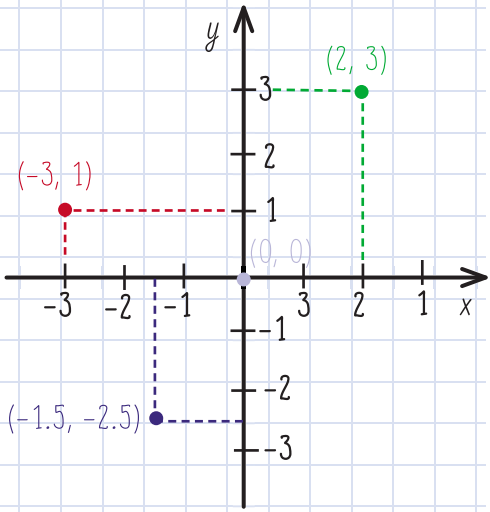
Алгебру, геометрию, высшую математику, даже физику, химию и биологию невозможно представить без системы координат. Ее изучает аналитическая геометрия, позволяющая решать геометрические задачи с помощью алгебры. Познакомимся с ней.

Система координат – способ определять положение и перемещение точки, о которой мы расскажем ниже, или тела с помощью чисел или других символов. Координатами точки называется совокупность чисел, которые определяют ее положение.

Систему координат можно выбрать на любой вкус, в зависимости от удобства, так, чтобы правильно характеризовать положение в пространстве точек, которые образуют траекторию движения тела.

Если траектория движения точки – прямая, то для нее используется **линейная** система координат – одна ось OX, та самая числовая ось, с которой мы уже знакомы.

Для движения точки на плоскости нужны две координатных оси. Их можно расположить под любым углом друг к другу. Если этот угол прямой, то мы имеем дело с обычной **прямоугольной** системой координат, которые называют декартовыми (в честь французского математика и физика Рене Декарта, который их предложил).

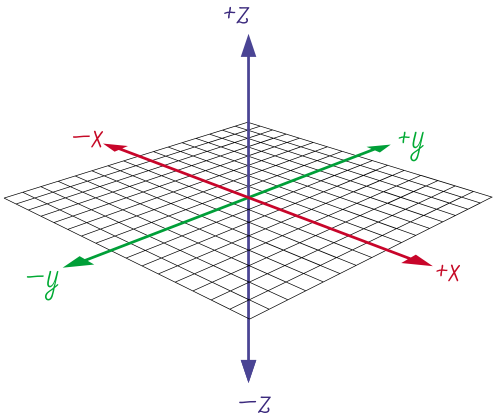


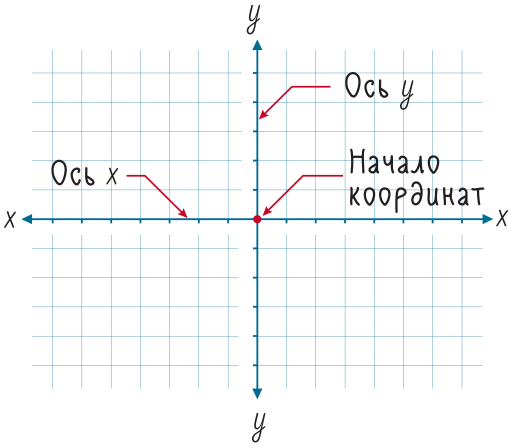
Для расчета движения точки в пространстве нужны три координатные оси. Координата точки на оси X называется абсциссой, координата на оси Y – ординатой, а координата на оси Z (если система строится в трехмерном пространстве) – аппликатой.

Угол между координатами может отличаться от 90 градусов, и такую систему называют **косоугольной**. Ее применяют, например, для описания положения атомов в кристаллической решетке.

Важно!

Прямоугольную систему координат легко обобщить для пространства любой размерности, поэтому она широко применяется.

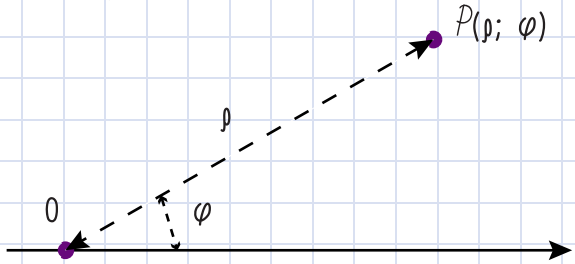




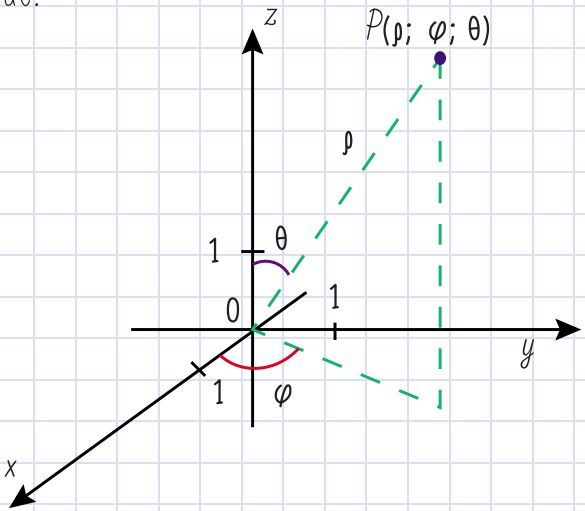
Важно!

Графиком функции называется множество всех точек на координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции. Если некоторому значению $x = xk$ соответствуют несколько значений (а не одно) y, то такое соответствие не является функцией. Для того чтобы множество точек координатной плоскости являлось графиком некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы любая прямая, параллельная оси Oy, пересекалась с графиком не более чем в одной точке.

Для описания положения точек на плоскости может быть применена и двухосная система координат, где одна из осей вращается вокруг начала координат, все время «указывая» на изучаемую точку плоскости. Такая система координат называется **полярной**.



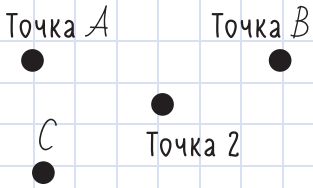
Существуют и **сферические** системы координат. Например, это географические координаты, где рассматриваются широта, долгота и высота над определенным уровнем (например, уровнем моря). Небесные координаты в астрономии также сферические. Это l, прямое восхождение и склонение.



Точка

Точка – это самая малая и самая простая геометрическая фигура, которая является основой всех прочих фигур.

Точка обозначается цифрой или большой латинской буквой (*A*, *B*, *C* и т. д.).

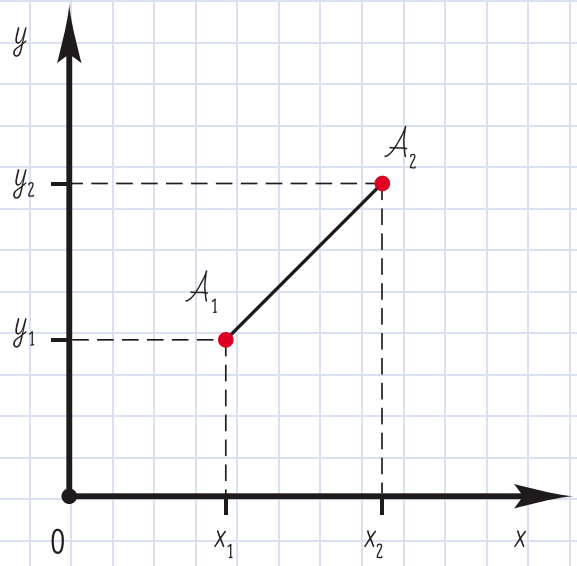


В евклидовой геометрии точка – это неопределяемое понятие, на котором строится геометрия, то есть ее невозможно определить в терминах ранее определенных объектов. Например, если окружность или круг определяются прежде всего как множество точек, то у точки такой основы – другой геометрической фигуры – нет.

Важно!

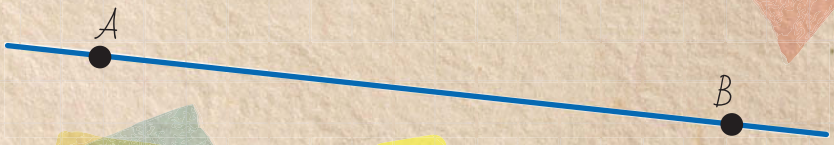
Хотя точка не определяется на основе других геометрических фигур, ее можно описать с помощью свойств, которым она должна удовлетворять. Так, геометрическая точка — это фигура, которая не имеет ни длины, ни площади, ни объема, ни какой-либо другой размерной характеристики.

С помощью координат точки обозначают уникальное местоположение объекта в евклидовом пространстве.



Прямая

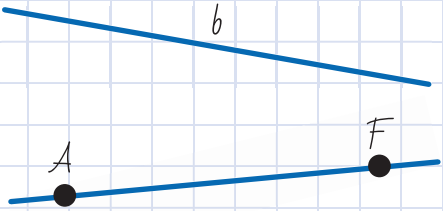
Прямая – это простая геометрическая фигура, которая не имеет ни начала, ни конца, и ее можно бесконечно продолжать в обе стороны.



Есть два способа обозначения прямых:

1. Строчной латинской буквой: прямая b.

2. Если на прямой есть точки, обозначенные прописными латинскими буквами, то и прямую можно записать как прямая AF.

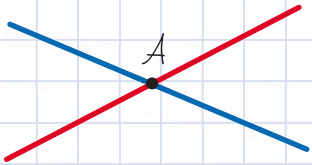


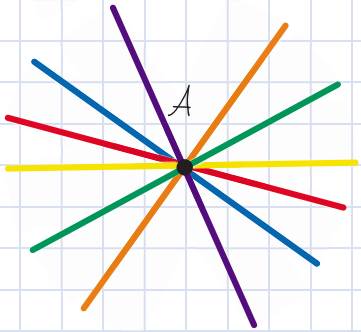
Это интересно

В Древней Греции слова «геометрия» и «математика» означали практически одно и то же, и даже над входом в Платоновскую Академию в Афинах было написано: «Не геометр да не войдет». Так что геометрию ценили задолго до того, как Евклид собрал воедино все античные знания по ней и, конечно, сделал новые открытия.

Прямые имеют следующие **основные свойства**:

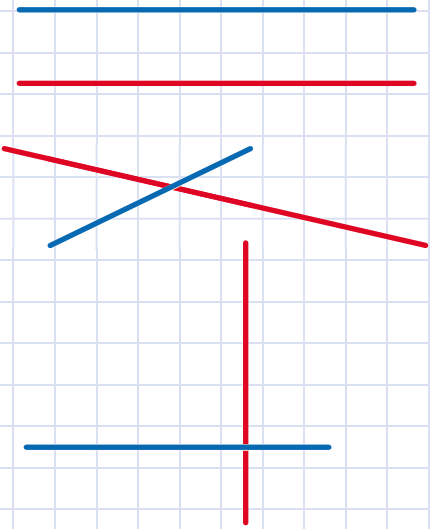
1. Через две точки проходит только одна прямая.
2. Две прямые пересекаются только в одной точке.
3. Через одну точку можно провести сколько угодно прямых.





Прямые бывают параллельными, пересекающимися и перпендикулярными.

1. **Параллельные** прямые не имеют ни одной общей точки и не пересекаются.
2. **Пересекающиеся** прямые имеют только одну точку пересечения.
3. **Перпендикулярные** прямые также имеют одну точку пересечения, причем пересекаются под прямым углом.



Важно!

Евклидова геометрия оказалась настолько проработанной, что дошла до наших дней, вошла в школьную программу и дала начало и успехам в технике, и новым открытиям в математике.

Луч

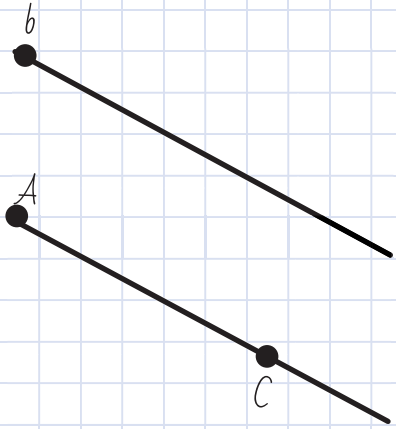
Луч – это часть прямой, которая имеет начало, но не имеет конца.

Луч расположен только по одну сторону от какой-либо точки.

Есть два способа обозначения лучей:

1. Строчной латинской буквой: луч b.

2. Если на луче есть две точки, обозначенные прописными латинскими буквами, причем одна из них – начало луча, а вторая лежит на нем, то луч можно записать как луч AC.



Важно!

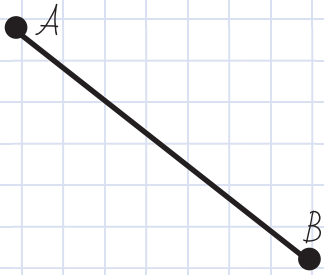
Луч также называется полупрямой, или бесконечным промежутком числовой прямой. Иными словами, любая точка, которая лежит на прямой линии, делит эту прямую на две полупрямые, то есть на два луча.

Для любого неотрицательного числа a на заданном луче с началом O существует единственная точка A, которая находится на расстоянии a от точки O.

Отрезок

Отрезок – это часть прямой линии, которая ограничена двумя точками.

Отрезок имеет начало и конец, поэтому можно измерить его длину, т. е. расстояние между двумя крайними точками этого отрезка.



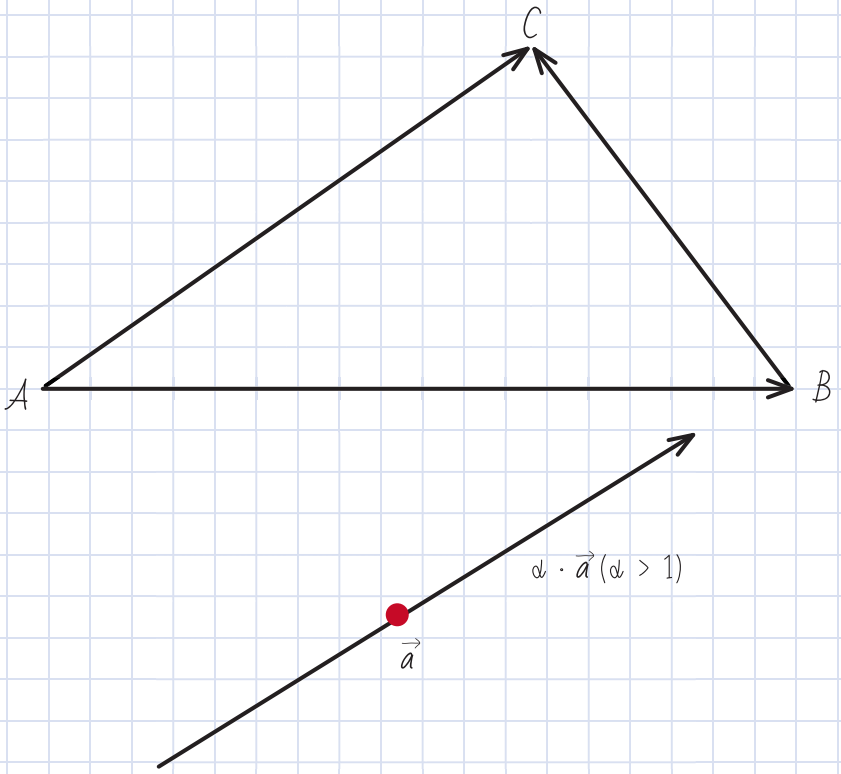
Отрезок обозначается двумя прописными латинскими буквами, которыми отмечены его крайние точки: отрезок AB.

Важно!

Обычно не имеет значения, в каком направлении расположены концы отрезка, иными словами, отрезки AB и BA — это один и тот же отрезок. Если же у отрезка определить порядок перечисления его концов, то такой отрезок называют направленным.

Вектор – направленный отрезок прямой, то есть такой, для которого указано, какая его граничная точка является началом, а какая – концом. Векторы изучают и в аналитической геометрии, и в векторной алгебре.

Вектор определяет параллельный перенос точек плоскости или пространства, когда точка A переходит в точку B и наоборот.

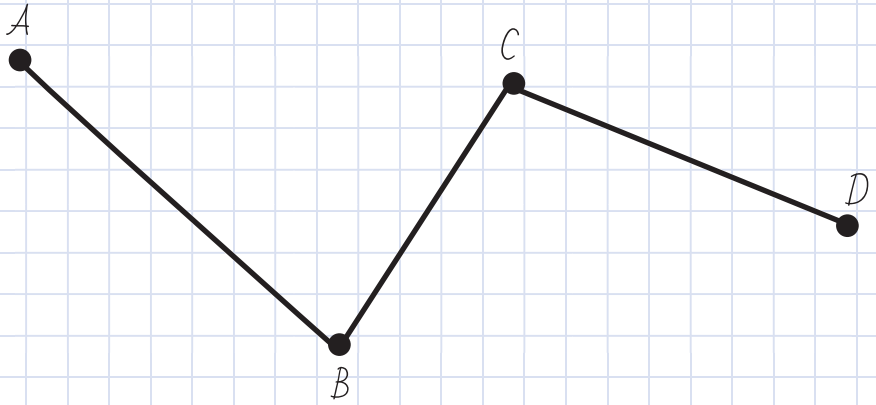


Ломаная

Ломаная линия – это геометрическая фигура, состоящая из отрезков, причем конец первого отрезка является началом второго, конец второго – началом третьего и т. д.

Какая же линия называется ломаной? Та, соседние отрезки которой не расположены на одной прямой.

Длина ломаной – это сумма длин всех ее звеньев: $AB + BC + CD$.



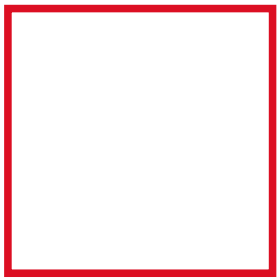
Отрезки ломаной называют **звеньями**, а точки, в которых отрезки соединяются, – **вершинами**.

Ломаная обозначается прописными латинскими буквами: ломаная $ABCD$.

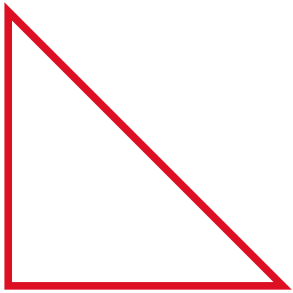
Звенья ломаной записываются как отрезки – AB, BC, CD, а вершины как точки – A, B, C, D.

Важно!

Ломаная называется замкнутой, если конец ее последнего отрезка совпадает с началом первого. Примером ломаной линии может быть любой многоугольник.



Четырехугольник – четырехзвенная замкнутая ломаная линия.

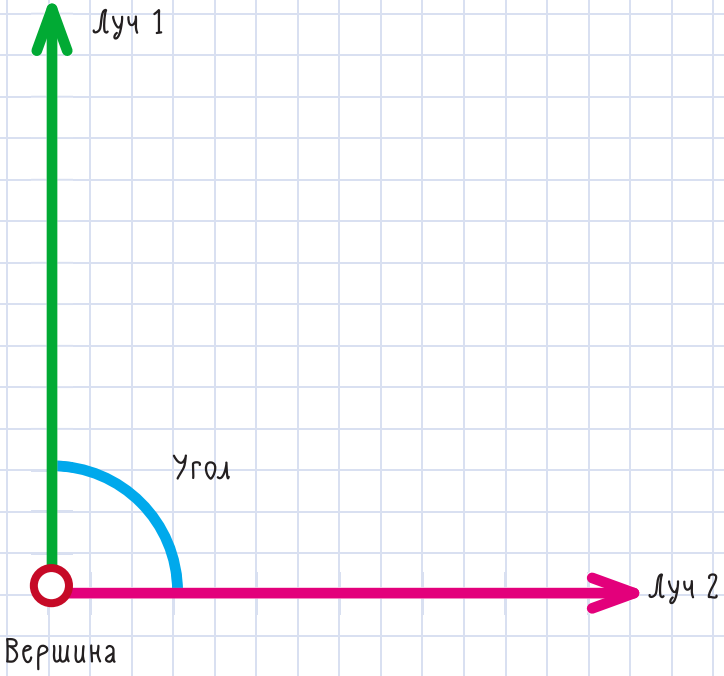


Треугольник – трехзвенная замкнутая ломаная линия.

Угол

Угол – геометрическая фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки – вершины угла.

Единицей измерения углов является **градус**. Для обозначения градусов используется специальный символ – °, например 100°, 90°, 20° и т. д.

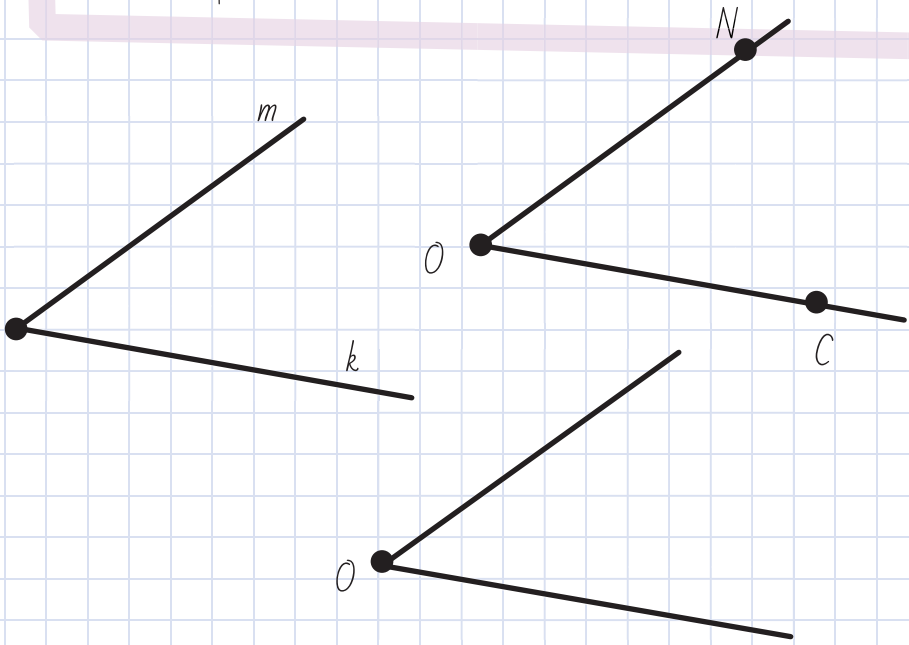


Для обозначения угла используется специальный символ ∠, а для записи применяют три основных способа:

1. Две строчные латинские буквы, обозначающие лучи, которые образуют этот угол: ∠*mk*.

2. Три прописные латинские буквы, одной из которых отмечена вершина, а остальными двумя – точки, расположенные на лучах угла: ∠*NOC*.

3. Одна прописная латинская буква, которой обозначена его вершина: ∠*O*.

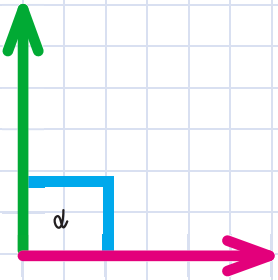


Важно!

Вершина угла всегда пишется посередине.

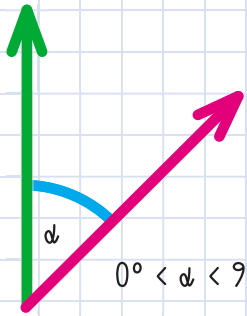
Основные виды углов: острый, прямой, тупой и развернутый.

Величина прямого угла равна 90°.



α = 90°

Угол, меньший 90°, называется острым.

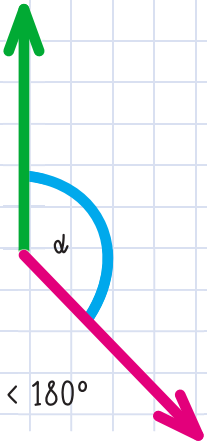


0° < α < 90°

Развернутый угол – это угол, равный 180°.

α = 180°

Угол, больший 90°, но меньший 180°, называется тупым.



90° < α < 180°

Это интересно

Исторически измерение углов в градусной мере восходит к древним цивилизациям Месопотамии — Шумеру и Вавилону. Там использовалась шестидесятеричная система счисления. В году количество солнечных дней близко к 360, а угловой диаметр Солнца на небе близок к 1/2 угла — поэтому шумерские и вавилонские астрономы разделили окружность на 360 «шагов». Это число было удобно для расчетов.

Угол разделяет собой плоскость на две части. При условии, что угол не развернутый, одну часть плоскости называют внутренней областью угла, а вторую – внешней. Если угол развернутый, то любую часть плоскости можно считать внутренней областью угла.

Прямоугольник и трапеция

Прямоугольник – это геометрическая фигура, у которой четыре стороны и четыре прямых угла.

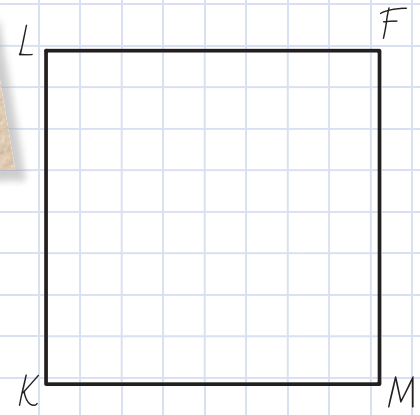
Прямоугольник обозначают четырьмя прописными латинскими буквами.

Важно!

Противоположные стороны прямоугольника $ABCD$ **равны:** $AB = DC$ **и** $BC = AD$.

Все углы прямоугольника прямые, т. е. равны 90°:
$\angle BAD = \angle ADC = \angle DCB = \angle CBA = 90°$.

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется квадрат.



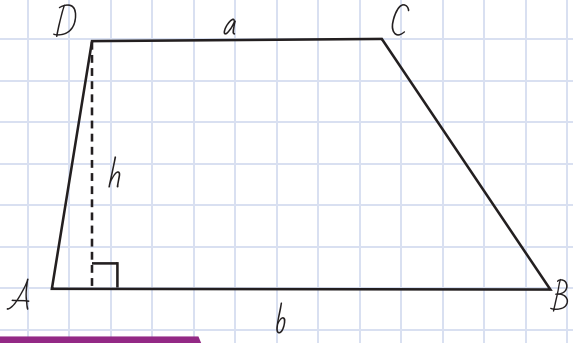
В квадрате $FLKM$ все стороны равны: $LK = KM = MF = FL$.

Все углы квадрата – прямые, т. е. равны 90°:
$\angle LKM = \angle KMF = \angle MFL = \angle FLK = 90°$.

Трапеция – это геометрическая фигура, у которой четыре стороны, две из которых параллельны.

Равнобедренная трапеция – это такая трапеция, боковые стороны которой равны.

Прямоугольная трапеция – это такая трапеция, одна из боковых сторон которой имеет прямые углы.

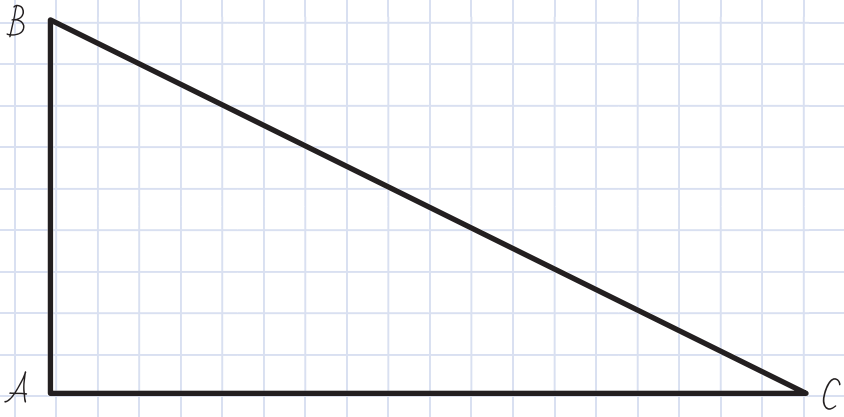


Треугольник

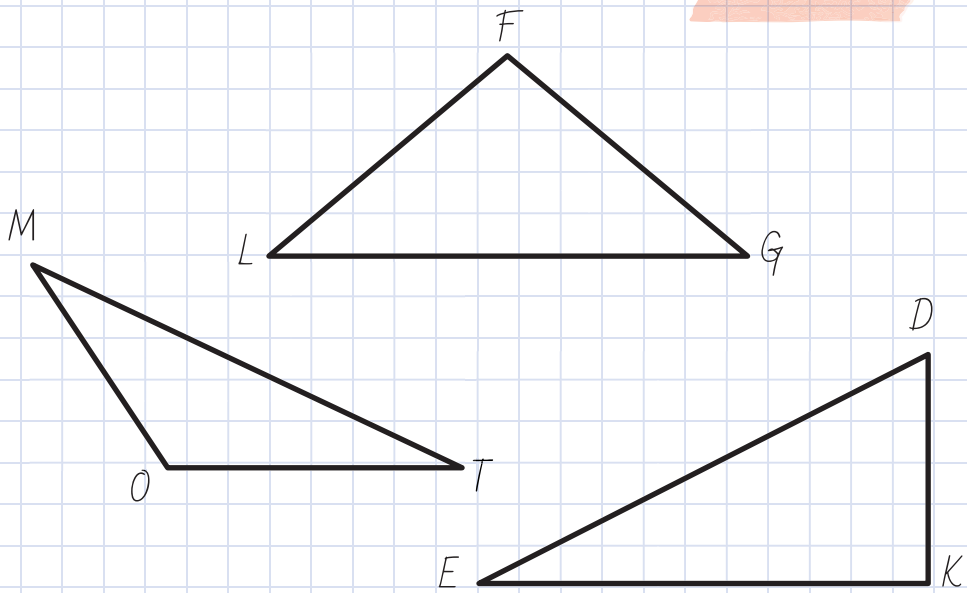
Треугольник – это геометрическая фигура, образованная тремя точками (вершинами) и тремя отрезками, соединяющими эти точки.

Если внимательно посмотреть на треугольник ABC, можно заметить, что:

1. У него три **угла**: $\angle BAC$, $\angle ACB$, $\angle CBA$.
2. **Вершинами** треугольника являются точки A, B, C.
3. **Стороны** треугольника – это три отрезка AB, AC и BC.



По видам углов треугольники бывают остроугольные, прямоугольные и тупоугольные.



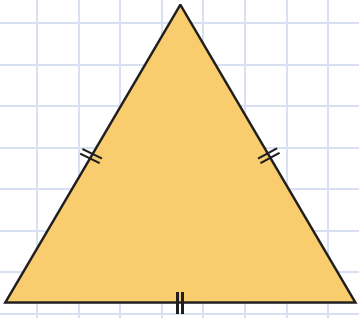
У треугольника LFG все углы острые, такой треугольник называется **остроугольным**.

У треугольника EDK один угол прямой, два остальных – острые, такой треугольник называется **прямоугольным**.

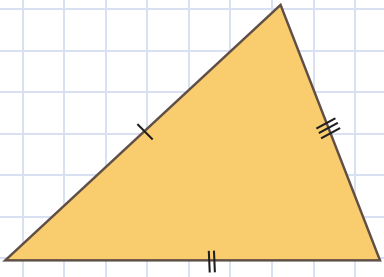
Треугольник MOT – **тупоугольный**, т. к. у него один угол тупой, а два остальных – острые.

В зависимости от соотношения длин их сторон треугольники бывают:

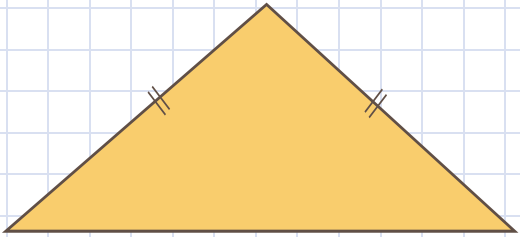
1. **Равносторонними** (у таких треугольников длины всех трех сторон равны).



2. **Разносторонними** (у таких треугольников длины всех трех сторон разные).



3. **Равнобедренными** (равны длины только двух сторон).

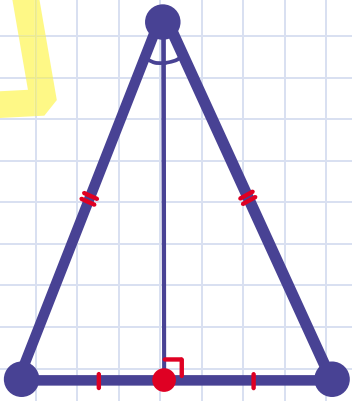


Биссектриса – луч, выходящий из вершины треугольника и делящий угол пополам.

Медиана – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Высота – перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону.

У равностороннего треугольника биссектриса, медиана и высота совпадают.



Важно!

Две стороны прямоугольного треугольника, образующие прямой угол, называются катетами, противоположная прямому углу сторона называется гипотенузой.

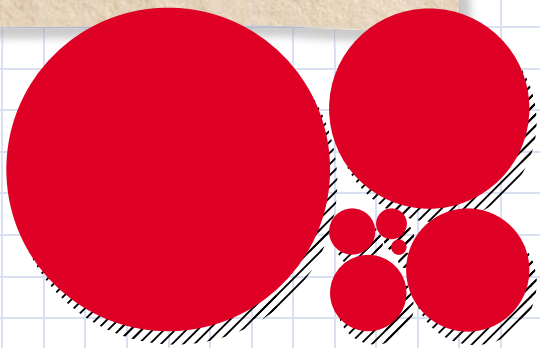
Начертите прямоугольный треугольник. Проведите в нем биссектрису, медиану и высоту из прямого угла.

Начертите равносторонний треугольник. Проведите в нем биссектрисы, медианы и высоты из всех углов.

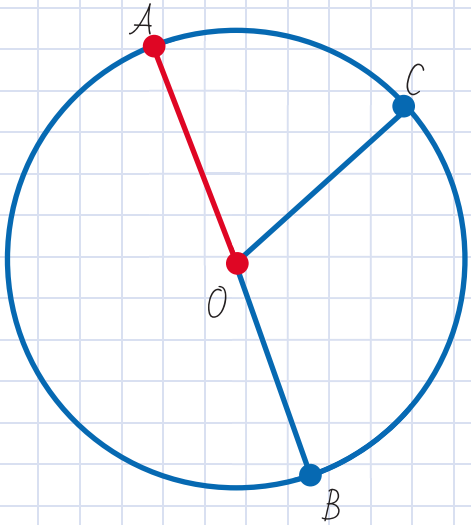
Окружность и круг

Окружность – это геометрическая фигура на плоскости, образованная замкнутой кривой линией, все точки которой находятся на одинаковом расстоянии от точки, называемой центром окружности.

Круг – это часть плоскости, лежащая внутри окружности, включающая и саму окружность.



Диаметром окружности является отрезок, который проходит через ее центр и соединяет две точки, лежащие на окружности. На рисунке диаметр – это отрезок AB (он проходит через центр окружности – точку O).



Хорда – это отрезок, соединяющий две точки окружности, так что диаметр – частный случай хорды. Хорда лежит на секущей – линии, пересекающей окружность.

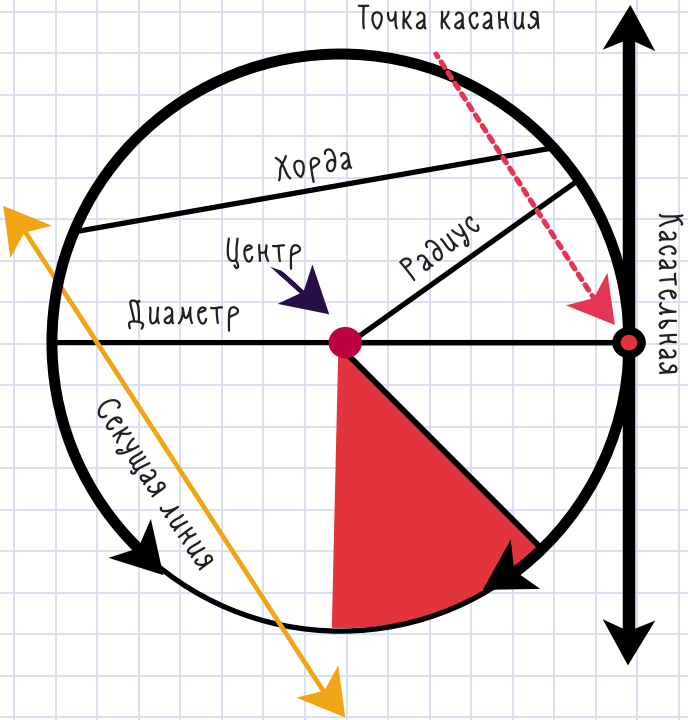
Радиус окружности – отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой, лежащей на этой окружности, а также длина этого отрезка.

Радиус – это расстояние от центра окружности до ее любой точки. Радиус окружности изображается на ней в виде отрезка, например OC, OA и OB.

Важно!

Радиус — это половина диаметра:

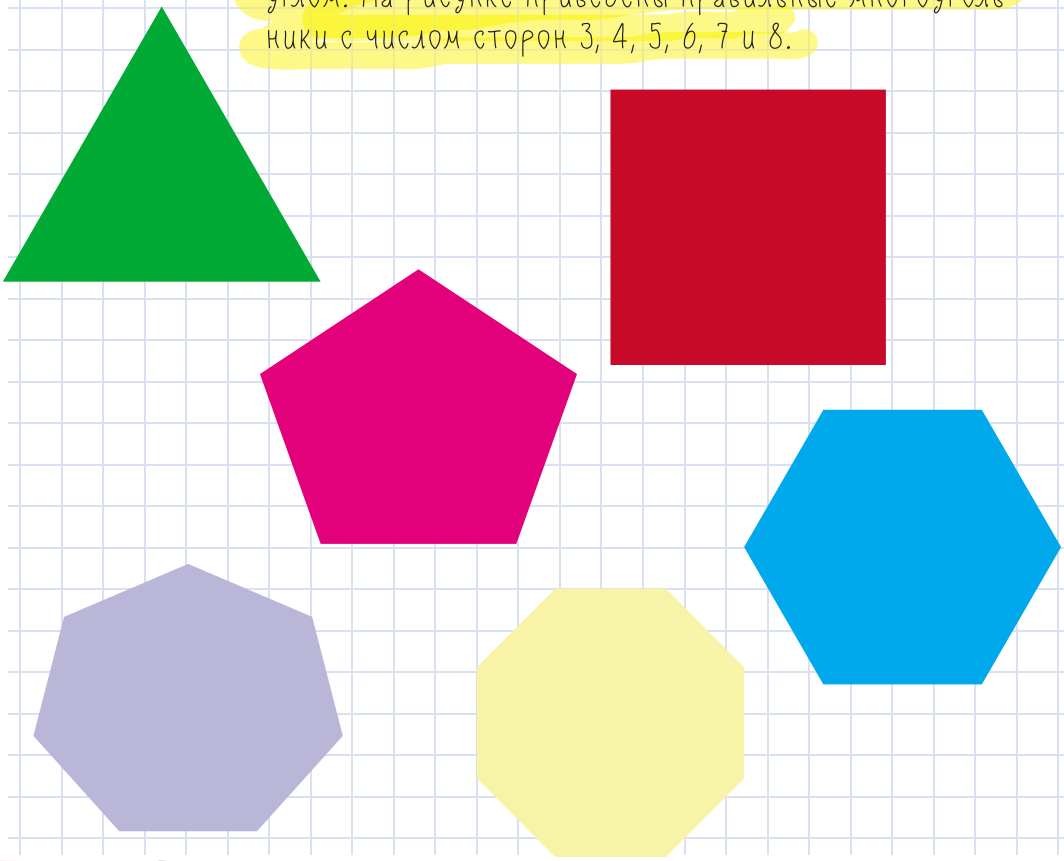
$$\frac{OC}{AB} = \frac{1}{2}AB.$$



Многоугольники

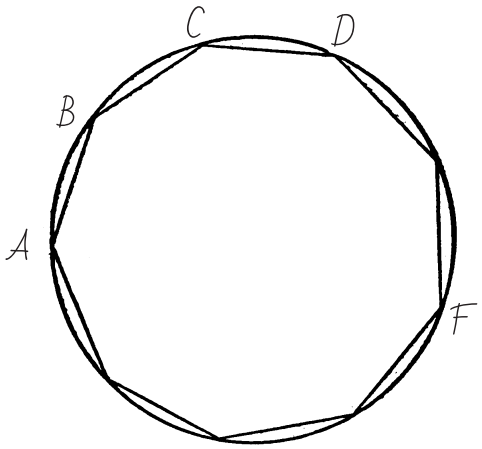
Многоугольник – это замкнутая фигура, образованная отрезками прямых линий.

Многоугольник является **правильным**, если все его стороны имеют одну и ту же длину, а каждая пара соседних сторон пересекается под одним и тем же углом. На рисунке приведены правильные многоугольники с числом сторон 3, 4, 5, 6, 7 и 8.



Внимание!

Треугольники, квадраты, прямоугольники, ромбы — это все многоугольники. Окружность, казалось бы, к ним не относится, потому что ее «сторона» представляет собой кривую, а не некоторое число отрезков. Хотя встречается определение, что окружность — это многоугольник с бесконечным количеством углов, стремящихся к нулю, или же многоугольник из бесконечного количества отрезков, чья длина стремится к нулю.



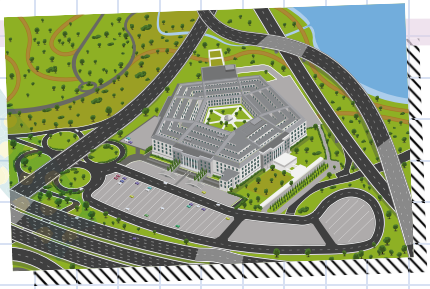
Это интересно

Существуют треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник, семиугольник, восьмиугольник... Вообще, эту последовательность можно продолжать сколь угодно долго: для каждого натурального числа, начиная с 3, существует правильный многоугольник с соответствующим числом сторон (и равным ему числом вершин).

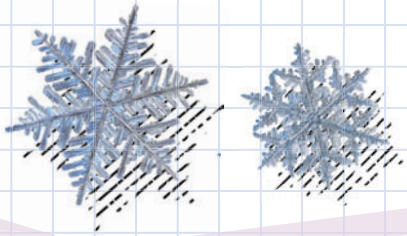
Правильные многоугольники в природе и архитектуре

Правильные многоугольники встречаются повсюду. Их используют и люди, и природа.

Самый известный правильный пятиугольник в архитектуре – здание Пентагона, Министерства обороны США. В переводе с греческого «пентагон» и означает «пятиугольник».



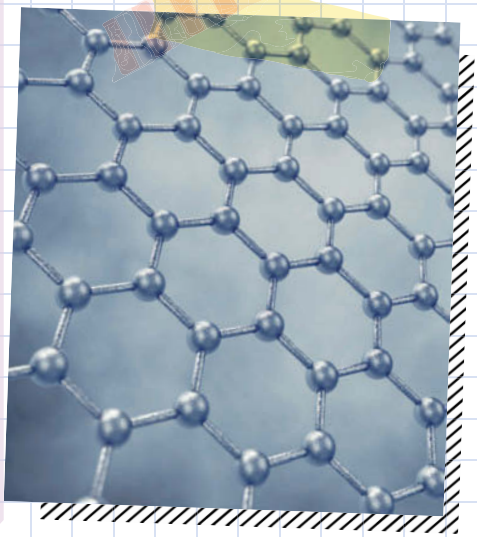
В основе снежинки лежит шестиугольник. Дело в том, что снежинки – это кристаллы льда, воды в твердом состоянии, которые имеют от природы шестиугольную форму.



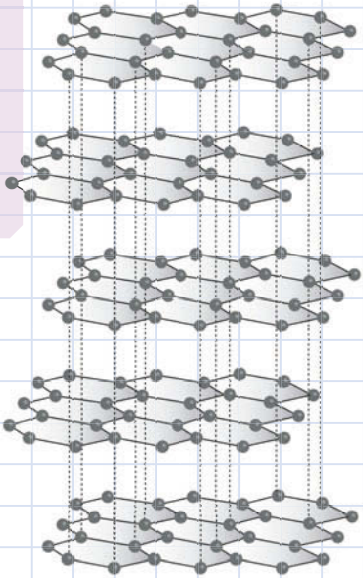
Это интересно

У многих простых веществ имеются разновидности — аллотропные модификации. Большим количеством аллотропных модификация отличается углерод. Это и алмаз, и графит, и графен, и фуллерен, и углеродные нанотрубки. В основе некоторых из них лежит правильный шестиугольник. Такая форма называется гексагональной (от греческого «гексагон» — шестиугольник).

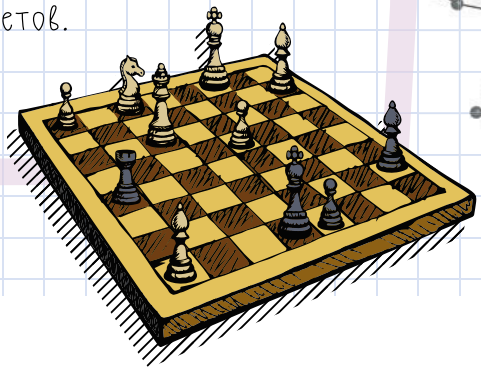
Структура графена, аллотропной модификации (разновидности) кристалла углерода, состоящего всего из одного слоя толщиной в атом. Шарики на картинке – атомы углерода. Каждый из них химически связан с тремя ближайшими соседями, находясь в центре правильного треугольника. В результате получается красивый узор из правильных шестиугольников



Одна из форм графита, слоистой модификации углерода, из которого делают карандашные грифели, имеет пятиугольную основу.



Шахматно-шашечная доска в форме квадрата разделена на 64 квадрата двух цветов.



Симметрия

Это интересно

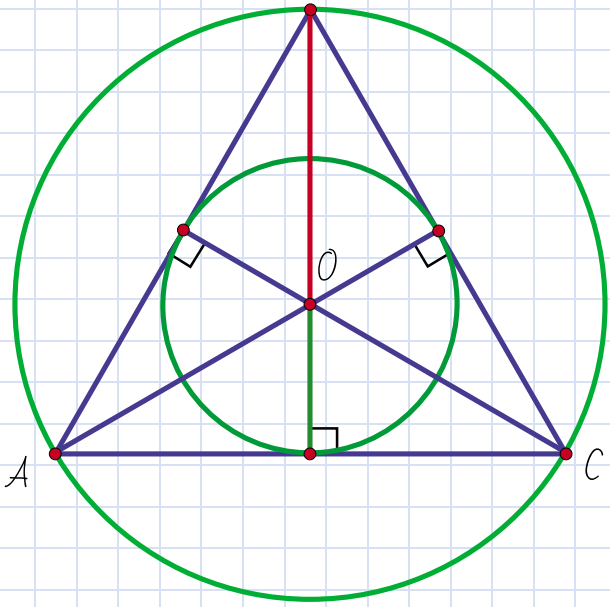
Существует множество красивых формул для вычисления разных характеристик правильных (и неправильных) многоугольников. Их легко можно найти в любом справочнике по математике. Однако куда интереснее те свойства многоугольников, которые роднят их с объектами иной математической природы. Например, с числами, многочленами или алгебраическими уравнениями. И даже с элементарными частицами! Слово это магическое — «симметрия».

Симметрия – сохранение объекта при любых преобразованиях, или, иными словами, преобразование, которое сохраняет стуктуру объекта. В геометрии симметричными считаются фигуры, сохраняющие исходные свойства при геометрических преобразованиях.

Правильный треугольник после поворота вокруг центра остается правильным, значит, он имеет осевую симметрию относительно вращения.

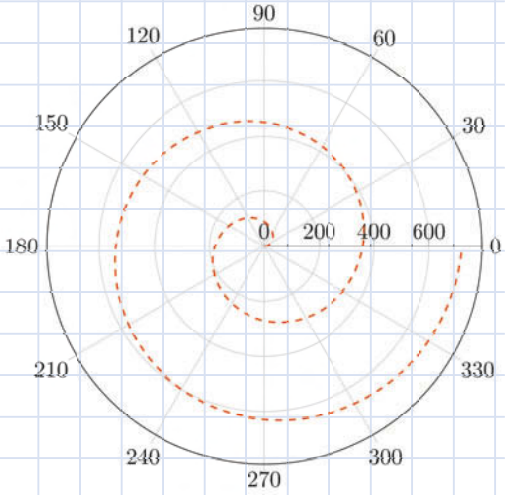
У правильного треугольника все три его линии – высота, биссектриса и медиана – совпадают между собой. Кроме того, они пересекаются в одной точке, являющейся центрами вписанной и описанной окружностей, а по совместительству – и физическим центром масс (центром тяжести) этой фигуры (точка O на рисунке).

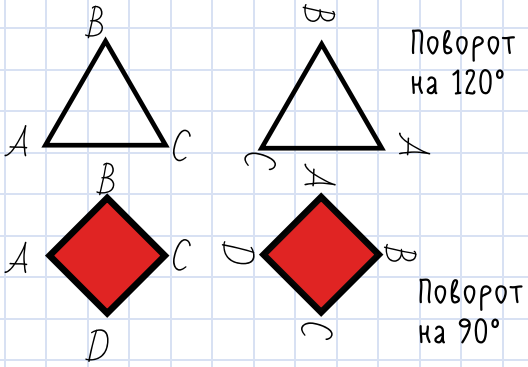
Очевидно, что такой треугольник – весьма «правильная» фигура. В чем заключается эта «правильность»? Его можно повернуть вокруг любой из упомянутых линий (высоты, медианы) на 180° или кратное число и получить тот же самый треугольник. Такое вращение выводит его за пределы плоскости, а мы пока занимаемся только планиметрией, то есть геометрией на плоскости. Поэтому поищем такие манипуляции, которые оставляют плоские фигуры на плоскости.



У правильного треугольника есть одна точка, которая расположена одинаково по отношению ко всем его вершинам, – точка O. Если повернуть фигуру вокруг этой точки, например на 120° против часовой стрелки в плоскости, то вершина A совпадет с прежним положением вершины C, C – с прежним положением вершины B, а B – с прежним положением вершины A. В результате получится тот же самый треугольник в той же самой позиции. Такого не произойдет, если угол поворота будет произвольным, не кратным 120°.

Три поворота – на 120°, 240° и 360° – переводят правильный треугольник в положение, не отличимое от первоначального. Такие преобразования в математике называют симметричными, или просто симметриями. Таких преобразований в нашем случае три – это повороты вокруг точки O. Значит, у правильного треугольника три симметрии.





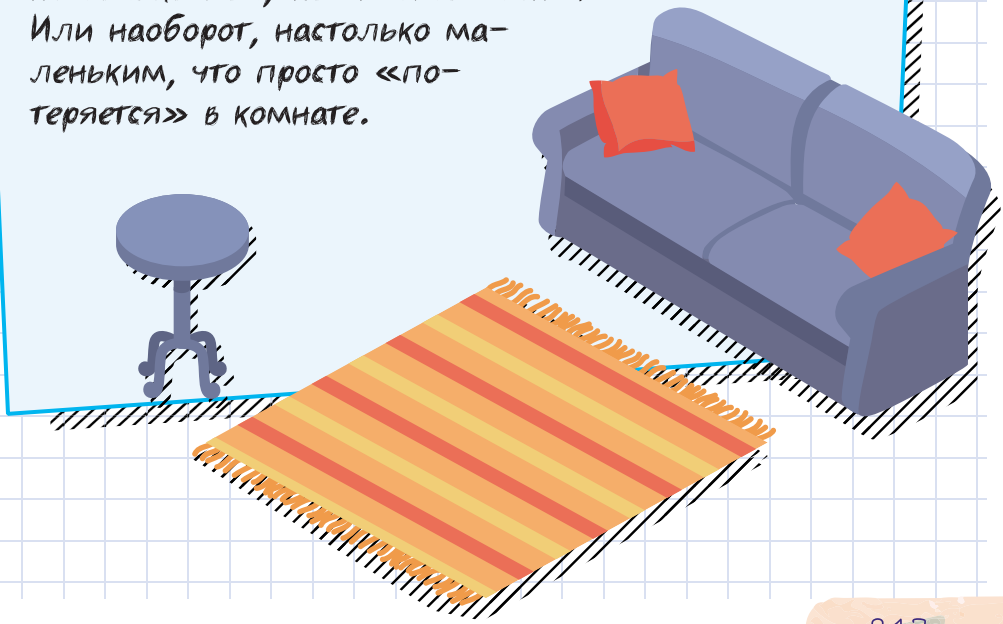
Углы поворота, соответствующие симметриям разных правильных многоугольников.

Периметр

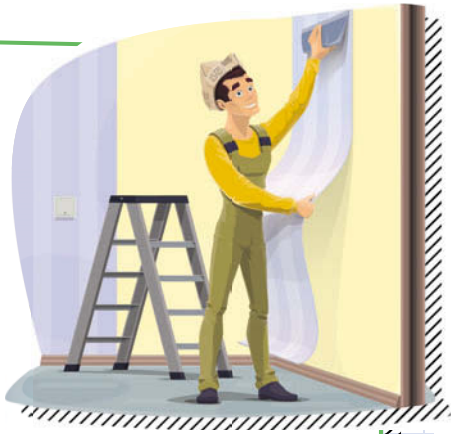
Периметр – это сумма длин всех сторон геометрической фигуры.

Это интересно

Умение рассчитывать периметр и площадь пригодится в повседневной жизни. Например, если человек решил купить ковер или сделать ремонт в своей квартире, то будет вынужден произвести определенные измерения и вычисления. Ведь какой смысл в ковре, если он будет настолько большим, что займет не только пол, но и часть стены? Или наоборот, настолько маленьким, что просто «потеряется» в комнате.



Важно!



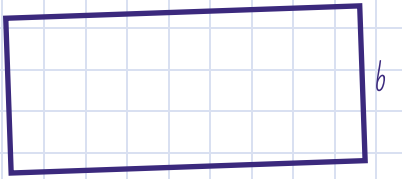
Делая ремонт, нужно знать, какое количество краски, обоев и прочих строительных материалов потребуется. Даже несмотря на очевидный факт, что для ремонта маленькой однокомнатной квартиры нужно гораздо меньше материалов, чем для ремонта двухэтажного дома, необходимо знать их точный расход. А для этого надо научиться рассчитывать периметр и площадь комнаты или квартиры.

Уже известно, что в прямоугольнике длины противоположных сторон равны, поэтому для нахождения **периметра прямоугольника** нужно сложить его длину и ширину и умножить на 2.

Важно!

$P = (a + b) \times 2$,

где a — длина прямоугольника, b — ширина прямоугольника.

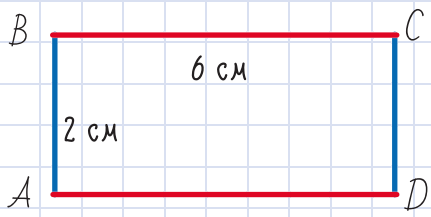


$$P = 2(a + b)$$

Периметр прямоугольника $ABCD$ рассчитываем по формуле:

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = (AB + BC) \times 2;$$

$$P_{ABCD} = (2 + 6) \times 2 = 16.$$

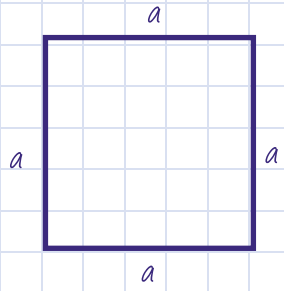


Периметр квадрата – это длина его стороны, умноженная на 4.

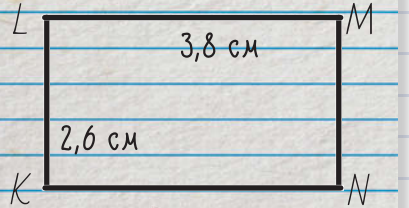
Важно!

$P = a \times 4$,

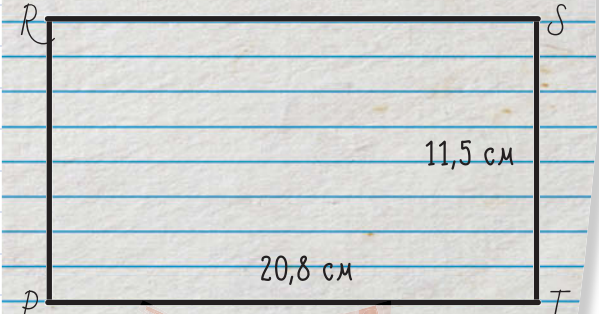
где a — длина стороны квадрата.



Найдите периметр прямоугольника со сторонами KL, LM, MN и KN.

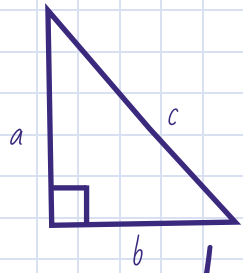


Найдите периметр прямоугольника со сторонами PR, RS, ST и PT.



Периметр треугольника равен сумме длин его сторон.

Чтобы вычислить периметр треугольника, нужно знать длины всех его сторон, причем в случае равностороннего треугольника достаточно знать длину только одной стороны, а равнобедренного – длины двух разных сторон.



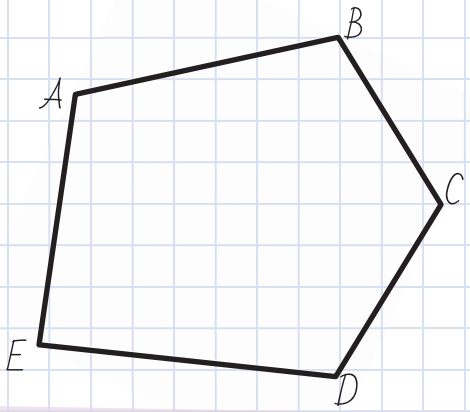
$$P = a + b + c$$

Важно!

$P = a + b + c.$

Периметр любого многоугольника можно вычислить так же, как и периметр треугольника, т. е. найти сумму длин его сторон.

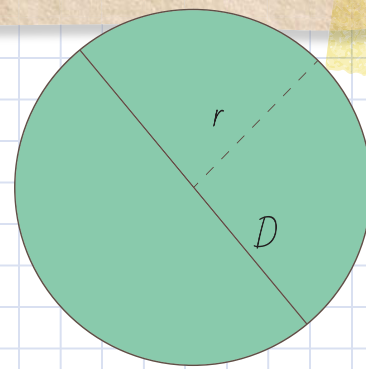
$$P_{ABCDE} = AB + BC + CD + DE + EA.$$



Еще древние математики обнаружили взаимосвязь между длиной и диаметром окружности. Они выяснили, что отношение длины окружности к ее диаметру является одинаковым для всех окружностей. Эту постоянную величину решили обозначать буквой греческого алфавита π (читается как «пи»).

В геометрии **длина окружности** обозначается прописной латинской буквой C. Чтобы найти длину окружности, нужно ее диаметр умножить на число π. Таким образом, число π – это отношение длины окружности к ее диаметру.

Длина окружности $C = \pi D$, или $C = 2\pi r$, так как $D = 2r$.



$$C = 2\pi r = \pi D$$

π — 3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502841027019385211055596446229489549 54

Это интересно

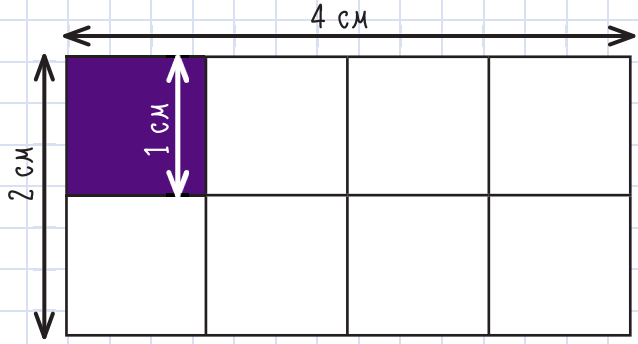
Число π — бесконечная непериодическая дробь, и поэтому полностью записать ее невозможно. Для математических вычислений его принято округлять до разряда сотых: π = 3,14.

Площадь

Площадь – это часть плоскости, заключенная в геометрической фигуре.

Площадь обозначается прописной латинской буквой S.

Фигура, представленная на рисунке, состоит из квадратов, сторона каждого из которых равна 1 см. Площадь одного такого квадрата, т. е. пространства, заключенного в нем, называется квадратным сантиметром. Так как таких квадратов на рисунке 8, то и площадь всей фигуры будет 8 квадратных сантиметров, или 8 $см^2$.



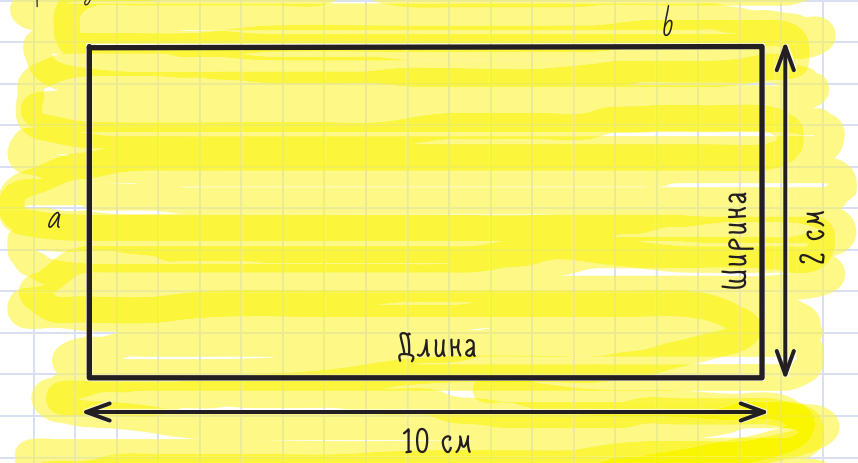
Площадь прямоугольника равна произведению его длины и ширины.

Площадь прямоугольника рассчитывают по формуле:

$$S = a \times b,$$

где a – длина, b – ширина.

Найдем площадь прямоугольника, изображенного на рисунке.

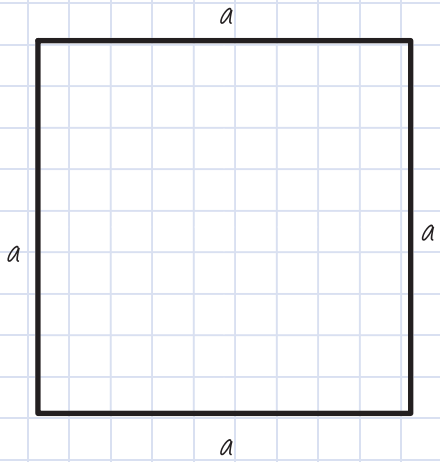


Решение:

Для этого воспользуемся формулой $S = a \times b$:

$S = 10 \times 2 = 20$ (см²).

Чтобы найти **площадь квадрата**, длину его стороны нужно умножить саму на себя, т. к. все стороны квадрата равны.



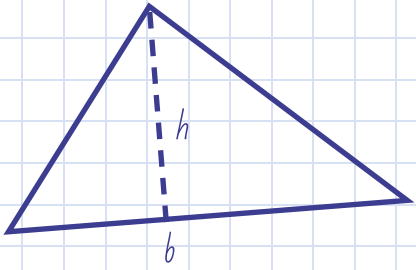
$$S = a^2$$

Самый простой способ нахождения **площади треугольника** – по его высоте и длине основания. Высота, как вы помните, это перпендикуляр, опущенный из любой вершины треугольника на противоположную сторону (основание) или ее продолжение.

Площадь треугольника равна половине произведения длин основания и высоты:

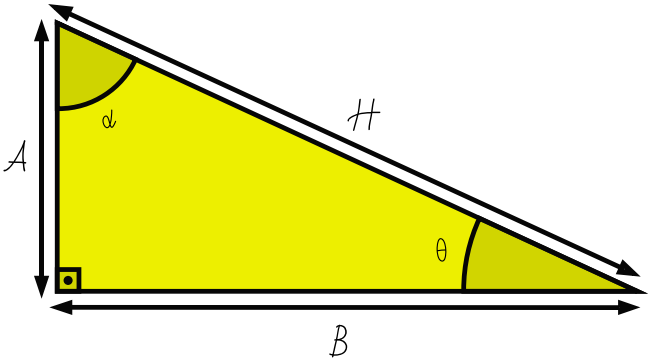
$$S = \frac{1}{2}(b \times h),$$

где b – основание, h – высота.



Важно!

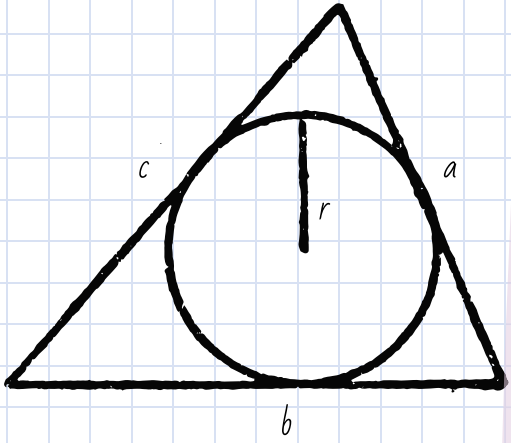
У прямоугольного треугольника высоты его острых углов совпадают с катетами. Поэтому, зная катеты, можно найти площадь треугольника, так как один из катетов в данном случае является высотой, а другой — основанием.



Площадь треугольника можно найти также через **радиус вписанной в него окружности** по формуле:

$$S = \frac{1}{2}(a + b + c) \times r,$$

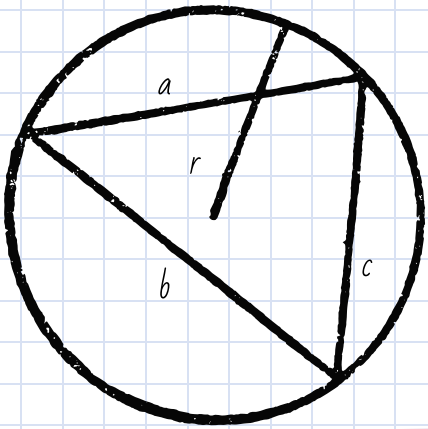
где r – радиус, а a, b и c – стороны треугольника. Проще говоря, площадь треугольника равна произведению радиуса вписанной в него окружности на полупериметр (половину периметра).



Площадь треугольника можно найти также через **радиус описанной окружности** по формуле:

$$S = \frac{abc}{4r},$$

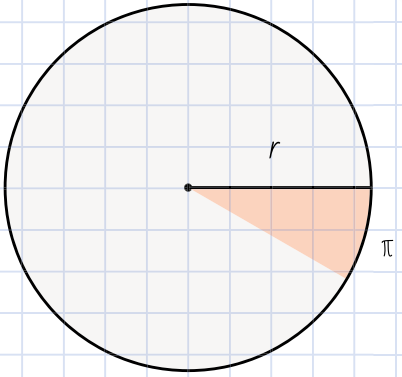
где r – радиус, а a, b и c – стороны треугольника.



Чтобы узнать **площадь круга**, нужно число π умножить на квадрат радиуса:

$$S = \pi r^2,$$

где $\pi \approx 3{,}14$, r – радиус.



$$S = \pi r^2$$

Площадь правильного многоугольника равна половине его периметра, умноженного на апофему (то есть перпендикуляр, проведенный к любой стороне многоугольника из его центра). Правильный многоугольник стремится к окружности при росте числа сторон, а апофема, соответственно, стремится к радиусу. Поэтому есть все основания считать, что площадь круга равна произведению половины длины окружности на радиус. Длина окружности, как известно, равна $2\pi r$. Следовательно, площадь круга равна $\pi r \times r$, то есть πr^2.

Это интересно

Древнегреческие ученые пытались с помощью циркуля и линейки без делений построить квадрат, равный по площади определенному кругу. Эту задачу назвали задачей о квадратуре круга. Но, чтобы найти длину стороны такого квадрата, надо решить уравнение $x^2 = \pi r^2$, где x — длина стороны квадрата, а r — радиус окружности. Длина стороны квадрата получается равной $\sqrt{\pi}$, а такой отрезок невозможно точно отмерить, ведь π — бесконечная непериодическая дробь. Поэтому задачу о квадратуре круга с помощью циркуля и линейки решить невозможно.

Важно!

Поскольку число π и радиус тесно связаны с диаметром и длиной окружности, найти площадь круга можно, зная любой из этих параметров.

Находим площадь круга при известном диаметре:

1. Мы знаем, что радиус – половина диаметра.
2. Таким образом, $S = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi\frac{d^2}{4}$.

Находим площадь круга при известной длине окружности:

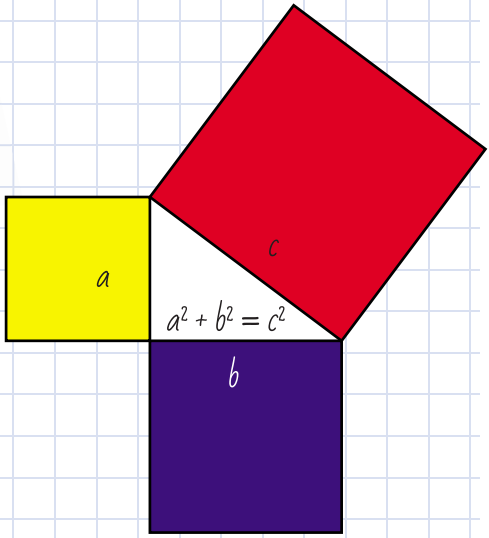
1. Мы знаем, что длина окружности $C = 2\pi r$.
2. Следовательно, $r = \frac{c}{2\pi}$.
3. Следовательно, площадь круга $S = \pi r^2 = \pi \times \left(\frac{c}{2\pi}\right)^2 = \frac{c^2}{4\pi}$.

Найдите площадь круга с диаметром 5 см.

Найдите площадь круга с диаметром 16,7 см.

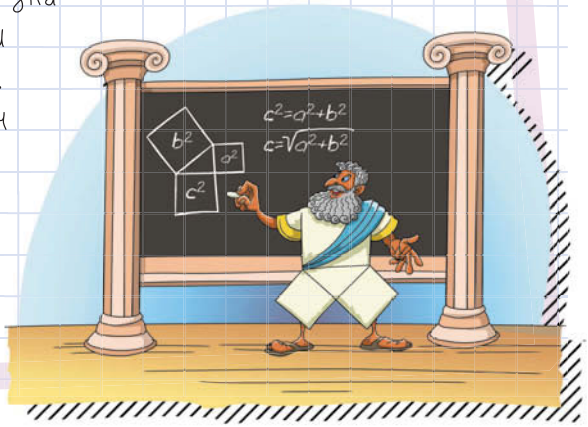
Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин двух катетов.



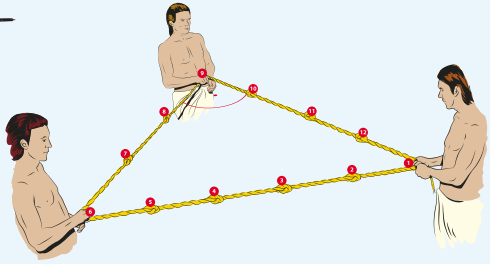
В обобщенном виде теорема Пифагора звучит так: самая длинная сторона в прямоугольном треугольнике находится в определенной связи с двумя другими.

Связь сторон в треугольнике люди подметили очень давно. Есть данные, говорящие о том, что равенство $3^2 + 4^2 = 5^2$ было известно древним египтянам уже около 2300 г. до н. э., во времена правления фараона Аменемхета I. Примерно в те же времена или немного позже это знание появилось и у вавилонян. Так что самая знаменитая теорема геометрии была открыта не Пифагором. Зато, возможно, именно он дал ее первое убедительное доказательство. Но известно, что эту теорему четко сформулировал и доказал Евклид в своих «Началах».



Это интересно

Древние египтяне строили прямые углы при помощи веревочных прямоугольных треугольников со сторонами 3, 4 и 5. Интересно, что древние греки называли натягивателями веревок — гарпедонаптаптами — египетских писцов, которые управляли храмами, их земельными угодьями и были потому сведущи и в землемерии.



С теоремой Пифагора связана арифметическая задача. Имеются такие тройки натуральных (т. е. целых положительных) чисел x, y, z, что

$$x^2 + y^2 = z^2. \qquad (1)$$

Их называют пифагоровыми тройками. Например, годятся числа $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$: $9 + 16 = 25$. А можно ли указать все пифагоровы тройки (x, y, z)? Иными словами, можно ли найти все решения уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ в натуральных числах? (В данном случае решение – это не одно число, а три.) Да. Ответ таков: каждое такое решение можно представить в виде

$$x = l(m^2 - n^2),\ y = 2lmn,\ z = l(m^2 + n^2), \qquad (2)$$

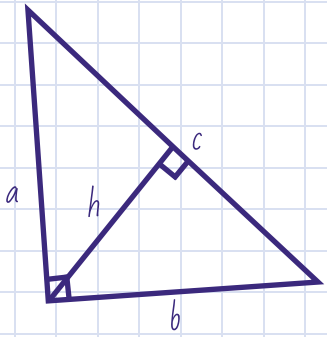
где l, m, n – натуральные числа, причем $m > n$, или в аналогичном виде, в котором x и y меняются местами. Можно чуть короче сказать, что x, y, z из (2) со всевозможными натуральными l и $m > n$ суть все возможные решения (1) с точностью до перестановки x и y. Например, тройка (3, 4, 5) получается при $l = 1$, $m = 2$, $n = 1$.

Теорема Пифагора сообщает определенную информацию о геометрическом объекте, но дает ее через числовые отношения. Выходит, числами можно описывать форму и размеры геометрических фигур, а значит, и предметов физического мира. Это имеет огромное значение как для математики, так и для физики.

Теорема утверждает, что **если построить квадраты на сторонах прямоугольного треугольника, то сумма площадей двух меньших квадратов будет равна площади большего из них**. Известное эревним соотношение $3^2 + 4^2 = 5^2$ – частный случай при $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Существует несколько сотен доказательств этой теоремы, в частности доказательства, использующие метод подобия треугольников. Одно из них можно представить следующим образом. Исходный треугольник подобен двум, на которые он разбит высотой h (у них всех равны три угла). Их площади пропорциональны квадратам соответствующих сторон, то есть a^2, b^2, c^2. Но поскольку два меньших треугольника составляют треугольник большой, то соответствующие площади суммируются, и в итоге получаем

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Что и требовалось доказать.

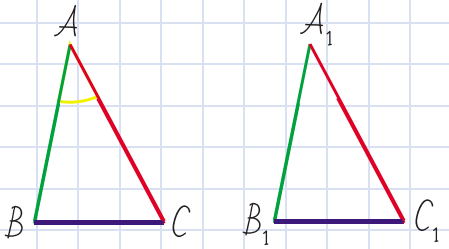


$$c^2 = a^2 + b^2$$

Важно!

Подобные треугольники в евклидовой геометрии — треугольники, углы у которых равны, а стороны пропорциональны.

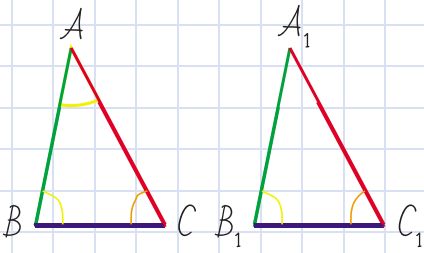
Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



$AB = A_1B_1;\ AC = A_1C_1;\ BC = B_1C_1$

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

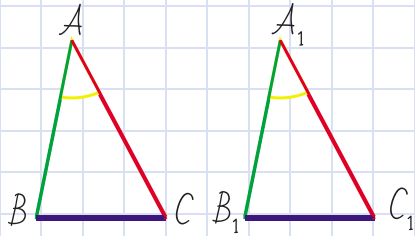
Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны.



$BC = B_1C_1;\ \angle B = \angle B_1;\ \angle C = \angle C_1$

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.



$AB = A_1B_1;\ AC = A_1C_1;\ \angle A = \angle A_1$

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

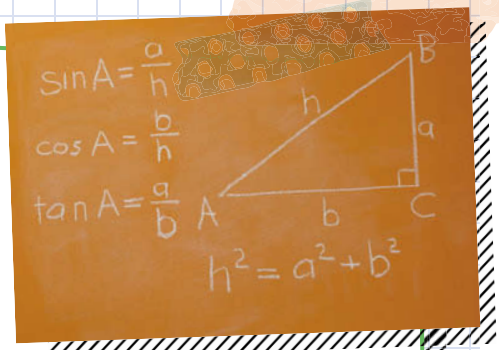
Применения и приложения теоремы Пифагора

Исследуя прямоугольные треугольники и теорему Пифагора, можно определить основные тригонометрические функции: синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс и арксеканс. Тригонометрические функции первоначально выражали зависимость длин сторон прямоугольных треугольников от острых углов при гипотенузе.

Используя теорему Пифагора, можно получить основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Важно!



Синус угла — отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинус угла — отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенс угла — отношение противолежащего катета к прилежащему.

Котангенс угла — отношение прилежащего катета к противолежащему.

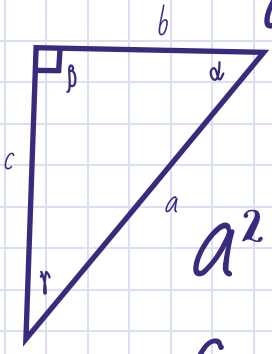
Секанс угла — отношение гипотенузы к прилежащему катету.

Косеканс угла — отношение гипотенузы к противолежащему катету.

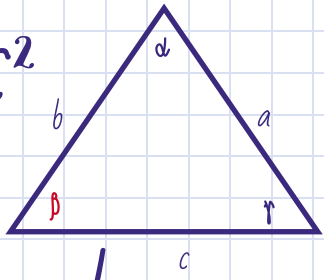
Теорема Пифагора поможет получить еще один важный результат тригонометрии – **теорему косинусов**. Она гласит, что в произвольном треугольнике квадрат любой стороны равен сумме квадратов двух других сторон за вычетом удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними. Например, для стороны a треугольника справа на следующем рисунке получается:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\beta.$$

Здесь β – угол между сторонами b и c. Аналогичные соотношения справедливы и для сторон b и c.



$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\beta$$

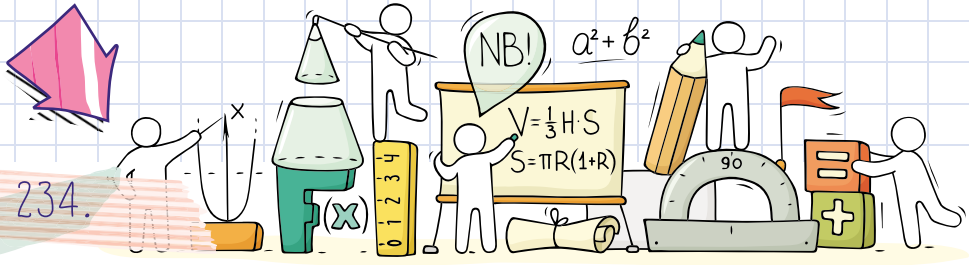
$$\frac{c}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\beta}$$

А **теорема синусов** утверждает, что в произвольном треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов.

Найдите синусы острых углов A и B треугольника со сторонами 3 см, 4 см, 5 см.

Проверьте себя и запишите ответ:

1. Чем теорема отличается от аксиомы?
2. Сколько постулатов предложил Евклид?
3. Какой постулат заменил Лобачевский?
4. Какие вы знаете системы координат?
5. Какой угол называется развернутым?
6. Сколько правильных многоугольников можно построить?
7. Какие соотношения позволяют получить число π?
8. Найдите периметр прямоугольника со сторонами 12,5 и 57 см.
9. Найдите периметр треугольника с катетами, равными 6 см и 8 см.
10. Найдите периметр треугольника с гипотенузой 15 см и меньшим катетом 12 см.
11. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны 6 и 8.
12. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5.
13. Найдите длину окружности, если 4/5 ее диаметра равны 20. Число π округлите до сотых.
14. Найдите площадь круга, если 2/3 длины окружности равны 16. Число π округлите до сотых.
15. Что такое квадратура круга и почему ее нельзя решить с помощью циркуля и линейки?



1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

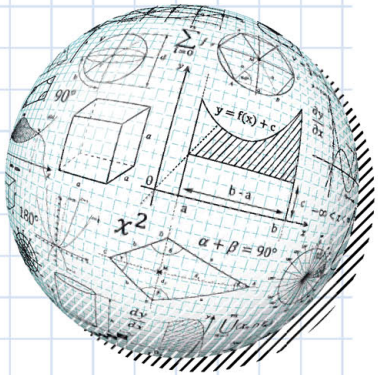
11.

12.

13.

14.

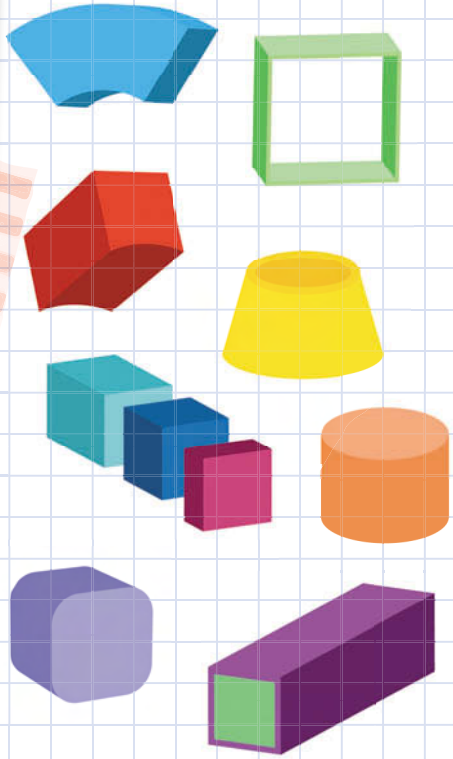
15.



Стереометрия

Аналогии в геометрии

Мы живем не на плоскости, а в пространстве, объекты которого имеют не только площадь, но и **объем**. Это пространственные фигуры. Раздел геометрии, их изучающий, называется стереометрией. Часть этого слова, «стерео», происходит от древнегреческого «стереос», означающего «пространственный», «объемный».



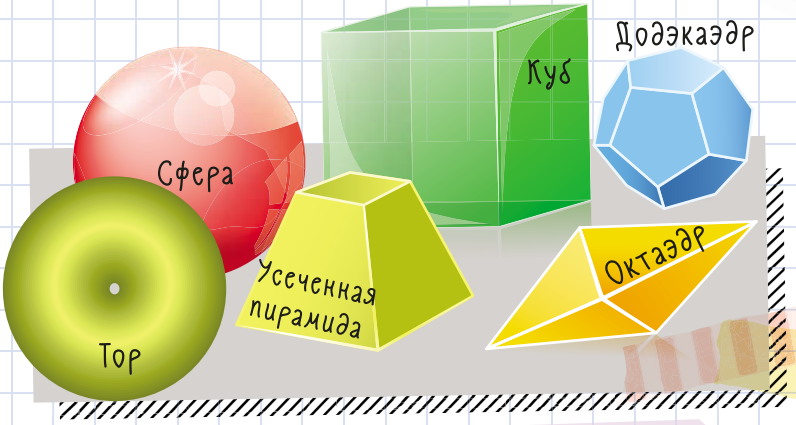
Стереометрия – это отдел геометрии, который изучает фигуры, не лежащие в одной плоскости.

Важно!

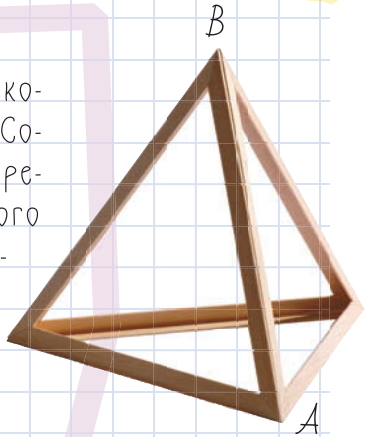
Все понятия планиметрии сохраняются и в стереометрии, но здесь они обретают как бы подчиненное положение, становясь составными элементами фигур более высокого «ранга» — замкнутых пространственных тел.

Особое положение среди пространственных фигур занимают многогранники, поверхность которых состоит из некоторого числа плоских многоугольников. Более того, можно провести аналогию между плоскими фигурами и многогранниками.

Пространственные фигуры и их плоские аналоги: тор и сфера – окружность; куб – квадрат; пирамида и октаэдр – треугольник; додэкаэдр – правильный пятиугольник.



Рассмотрим прямолинейный отрезок на плоскости и точку A вне его на той же плоскости. Соединив крайние точки отрезка с A, получим треугольник. Теперь соединим все точки полученного треугольника с точкой B, лежащей над плоскостью нашего треугольника. Мы получим **тетраэдр** – многогранник, поверхность которого составлена из треугольников, таким образом, тетраэдр – аналог треугольника.

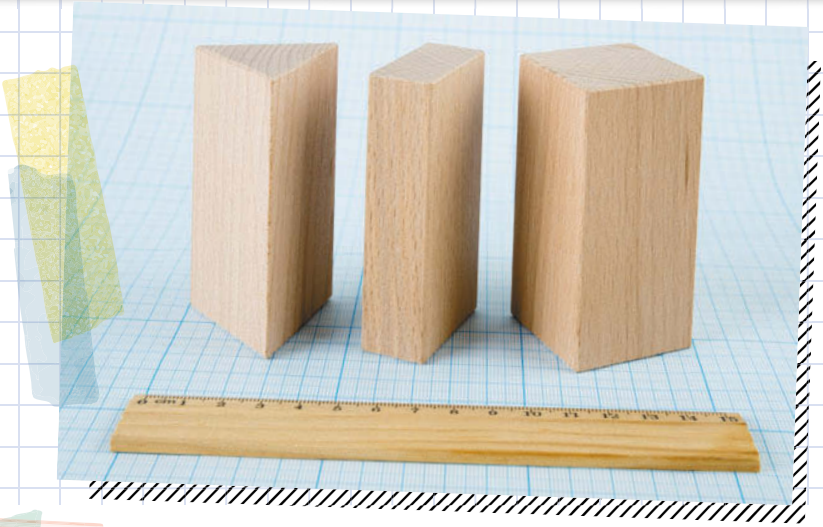


Важно!

Процедуру с «превращением» многоугольника в многогранник можно проделать с любым многоугольником и треугольниками и получить пирамиду — многогранник с треугольниками в качестве боковых граней и выбранным многоугольником в качестве основания.

Можно провести и другие аналогии между плоскими и пространственными фигурами. Если в плоскости перемещать отрезок прямой параллельно самому себе, то он опишет **параллелограмм**. А если перемещать многоугольник параллельно самому себе вдоль прямой, пересекающей содержащую его плоскость, то он опишет **призму**.

Призмы – многогранники, основаниями которых являются равные многоугольники, а боковыми гранями – параллелограммы.

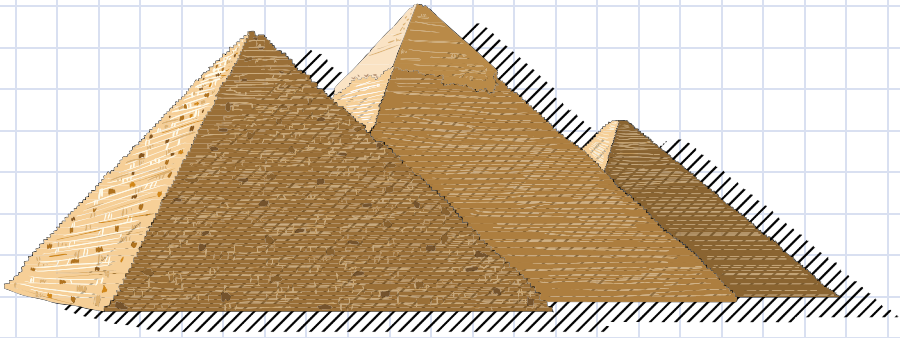


Важно!

Между «обитателями» плоскости и пространства можно провести различные аналогии. Это помогает получить ряд результатов стереометрии, опираясь на знание планиметрии.

Это интересно

Более 4600 лет назад в древнем Египте были построены пирамиды. Они служили усыпальницами фараонам и, возможно, обсерваториями. Всего пирамид было построено 118, из них три называют великими — это пирамиды Хеопса, Хефрена и Микерина. Самая высокая из них — пирамида Хеопса — имеет высоту 139 м и квадратное основание со стороной 230 м. Это единственное из семи чудес света древности, сохранившееся до наших дней. О ее постройке до сих пор спорят египтологи. Некоторые из них считают, что строителям древнего Египта были известны число π и значение золотого сечения. Ученые полагают, что эти величины были ключевыми в строительстве пирамид.



Теорема Пифагора в пространстве

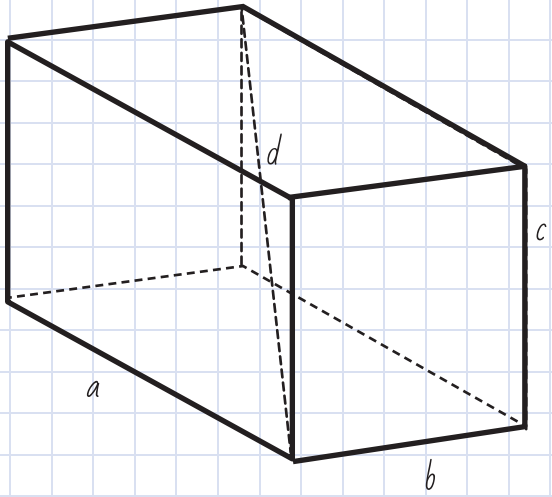
В стереометрии можно сформулировать и доказать теорему, подобную теореме Пифагора на плоскости.

Рассмотрим пример полезности аналогии между плоскими и пространственными фигурами. Имеется прямоугольный параллелепипед – прямая призма, все грани которой являются прямоугольниками. Нужно найти его диагональ d, если известны длина a, ширина b и высота c.

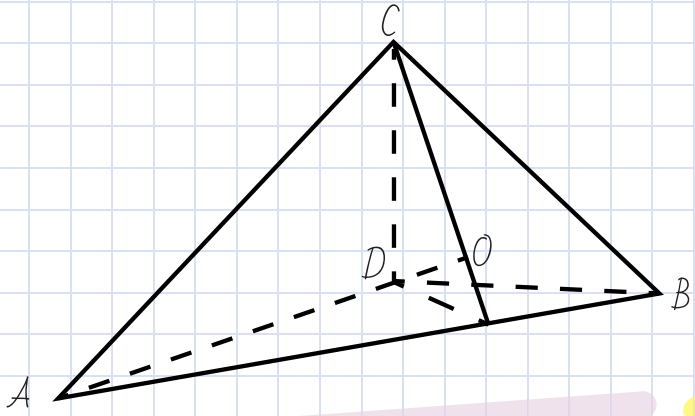
Докажем, что

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Формула $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ очень похожа на обычную теорему Пифагора для прямоугольных треугольников.



Прямоугольный треугольник получается, если в прямоугольнике провести диагональ и отбросить один из получившихся треугольников. Точно таким же образом в прямом параллелепипеде можно провести плоскость, проходящую через одну из диагоналей основания и противолежащую ей вершину верхней грани. Отбросив одну из частей, получим фигуру, которую можно назвать тетраэдром с прямым трехгранным углом.



Изучим получившуюся фигуру. В вершине D сходятся три ребра тетраэдра, каждое из которых перпендикулярно к двум другим. Поэтому трехгранный угол при этой вершине является прямым. Он соответствует прямому углу в прямоугольном треугольнике, а сам тетраэдр – такому треугольнику. Роль гипотенузы мы отдадим грани ABC, а прочие грани будут довольствоваться ролью катетов. Тогда можно доказать, что квадрат площади грани прямоугольного тетраэдра, лежащей против вершины с прямыми плоскими углами, равен сумме квадратов площадей остальных граней этого тетраэдра:

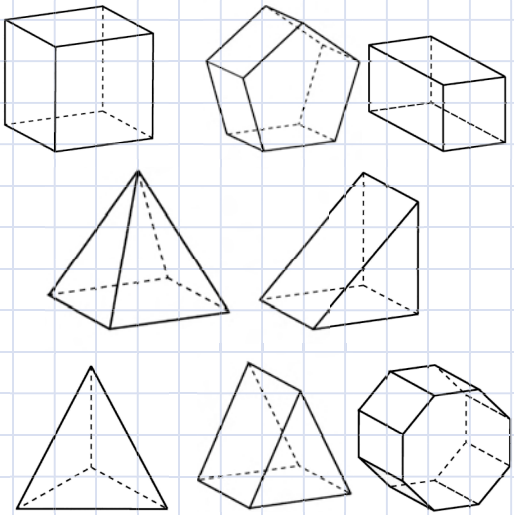
$$S^2_{ACB} = S^2_{ADC} + S^2_{ADB} + S^2_{CDB}.$$

Это интересно

Деревья, как известно, состоят из ствола и ветвей. Ветви — две и более — отходят от ствола или более толстых ветвей. Как оказывается, они тоже знакомы с теоремой Пифагора. Пусть ствол или ветвь разделяется, например, на ряд ветвей. Тогда «древесная» теорема Пифагора утверждает, что площадь сечения ствола равна сумме площадей сечений отходящих от него веток. Или считая эти сечения приблизительно кругами: квадрат радиуса ствола равен сумме квадратов радиусов ветвей, на которые он разделяется.

Закон Эйлера для многогранников

Элементами многоугольников считаются углы и стороны. У многогранников – двугранные углы у ребер, образованные гранями, сходящимися вдоль этих ребер, сами ребра и вершины, в которых сходятся три или более ребер. Кроме того, каждая грань является многоугольником с внутренними плоскими углами.



Великий математик Леонард Эйлер доказал, что вообще в любом выпуклом многограннике сумма числа граней и числа вершин равна числу ребер, увеличенному на два.

В частности, для n-угольной пирамиды $Г = n + 1$, $В = n + 1$, $Р = 2n$; для n-угольной призмы $Г = n + 2$, $В = 2n$, $Р = 3n$.

Каждая грань многогранника есть многоугольник. В выпуклых многогранниках $Г$ – число граней, $В$ – число вершин, $Р$ – число ребер в любом из них. Например, у куба $Г = 6$, $В = 8$, $Р = 12$; у пятиугольной пирамиды $Г = 6$, $В = 6$, $Р = 10$; у шестигранной призмы $Г = 8$, $В = 12$, $Р = 18$. У этих, а также остальных выпуклых многогранников выполняется одно и то же соотношение: $Г + В = Р + 2$.

Пять платоновых тел

Правильные многогранники – это объемные тела, все грани которых являются одинаковыми правильными многоугольниками, одинаково соединяющимися в каждой вершине.

Платоновыми телами, по имени греческого философа Платона, который придавал особое значение в устройстве мироздания многогранникам, называются те правильные многогранники, существование которых возможно в пространстве.

Важно!

В плоскости допустимы правильные многоугольники с любым числом сторон. А в пространстве возможно существование только пяти правильных фигур.

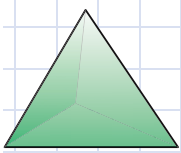
Тетраэдр. У него четыре треугольные грани и четыре вершины, в каждой из которых сходится по три ребра.

Октаэдр. Составлен из двух четырехугольных пирамид, соединенных своими основаниями. Имеет восемь треугольных граней и шесть вершин, в которых сходятся по четыре ребра.

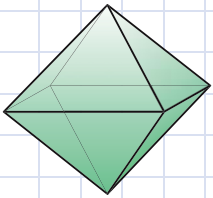
Куб. Имеет шесть квадратных граней и восемь вершин, в каждой из которых сходятся три ребра.

Додекаэдр. У него 20 пятиугольных граней, столько же вершин с тремя сходящимися ребрами в каждой.

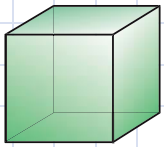
Икосаэдр. Имеет 20 треугольных граней и 12 вершин, в каждой из которых встречаются по пять ребер.



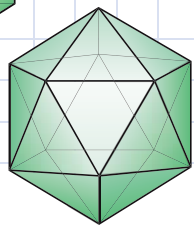
Тетраэдр



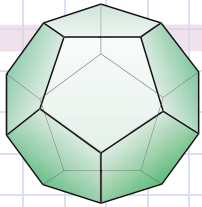
Октаэдр



Куб



Икосаэдр

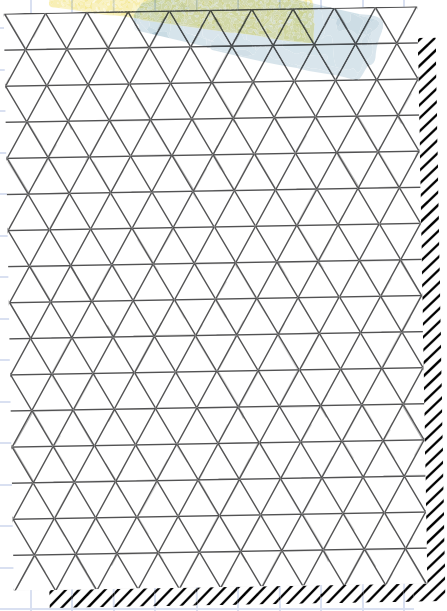


Додекаэдр

Почему правильных многогранников так мало? Дело в том что выпуклый многогранник называется правильным, если его гранями являются равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число граней, причем они не должны лежать в одной плоскости. А последнее условие выполняется только для трех видов многоугольников – треугольника, квадрата и пятиугольника. В вершинах выпуклого многогранника может сходиться три, четыре или пять правильных треугольников, только три квадрата, только три правильных пятиугольника. Значит, правильных многогранников может быть только пять. Это строго доказал еще Евклид в своих «Началах».

Важно!

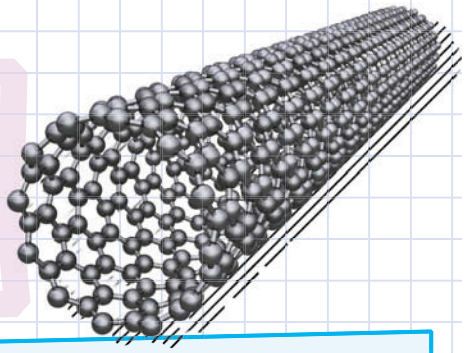
У тетраэдра, октаэдра и икосаэдра в вершинах сходятся по три, четыре и пять треугольников соответственно. Попробуем соединить в одной вершине больше — шесть правильных треугольников. Чтобы все шесть были плотно «пристыкованы» сторонами, их придется расположить в плоскости. Иначе (в разных плоскостях) не получится!



Важно!

Невозможно соорудить и правильный многогранник с тремя сходящимися в одной вершине шестиугольными гранями. Плоскость получится. Конечно, эту плоскость можно скрутить в трубочку. Например, так свернутый лист графена образует так называемую нанотрубку. Но это будет уже совсем другая фигура!

Углеродные нанотрубки представляют собой свернутый в трубочку графен, а значит, тоже состоят из правильных шестиугольников.



Это интересно

Пять правильных многогранников пригодились немецкому ученому Кеплеру для создания модели Солнечной системы. Он решил, что радиусы орбит шести планет совпадают с радиусами сфер, связанных с пятью правильными телами следующим образом. Самый большой радиус имеет сфера Сатурна. В нее вписан куб. В этот куб вписана сфера, радиус которой есть радиус сферы Юпитера. В сферу Юпитера вписан тетраэдр, а в тетраэдр, в свою очередь, вписана сфера, радиус которой есть радиус сферы Марса, — и так для всех пяти правильных тел. В результате такого построения Кеплер получил шесть сфер — по числу известных тогда планет.

Полуправильные многогранники

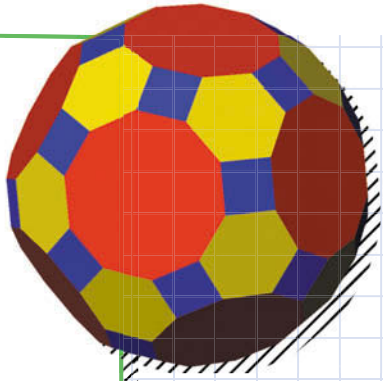
Полуправильным многогранником называется выпуклый многогранник, гранями которого являются правильные многоугольники (возможно, с разным числом сторон) и все многогранные углы которого равны.

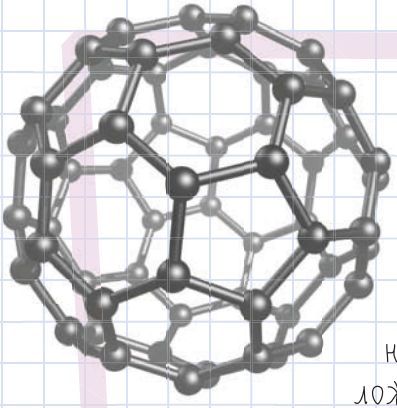
Полуправильный многогранник можно построить, если в определении правильного многогранника допустить, чтобы его гранями могли быть различные правильные многоугольники. Тогда получается новый класс многогранников – полуправильные.

В природе существуют полуправильные многогранники, чьи грани представляют собой правильные шестиугольники и правильные пятиугольники. Некоторые из них описал Архимед, потому они называются архимедовыми телами.

Важно!

Ромбоусеченный икосододекаэдр — чемпион среди архимедовых тел по числу вершин и ребер.



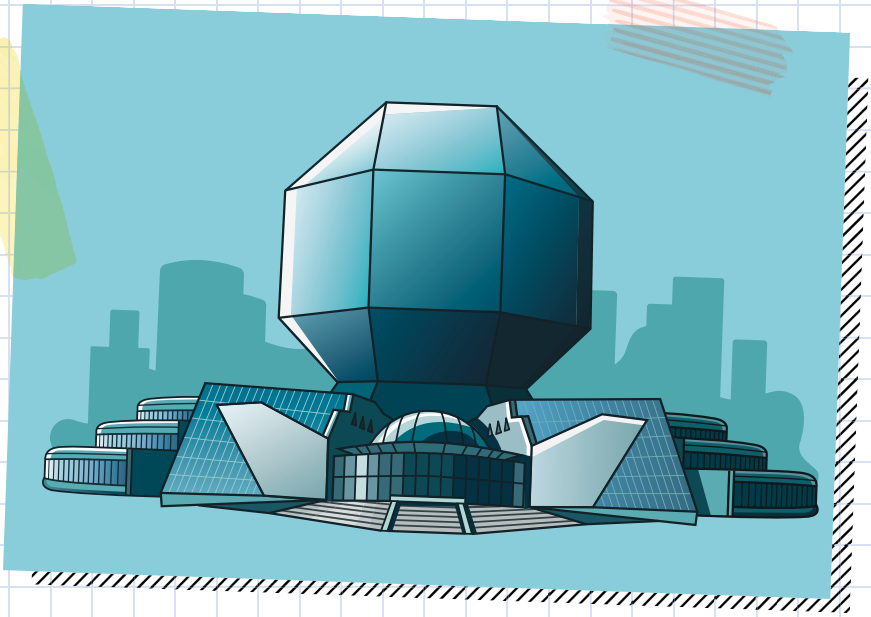


Полуправильным многогранником является молекула фуллерена C_{60} – одной из аллотропных форм углерода. Фуллерен имеет форму выпуклого полуправильного многогранника с 12 пятиугольными и 20 шестиугольными гранями. В 60 вершинах расположены атомы углерода. Соединяющие их 90 ребер символизируют связи каждого атома с тремя ближайшими соседями.

Это интересно

В природе многогранники различных видов и форм встречаются повсеместно, это, например, молекулы, вирусы, бактерии и даже водоросль вольвокс, представляющая собой колонию из множества клеток.

Ромбокубооктаэдр – полуправильный многогранник, поверхность которого состоит из граней куба и октаэдра, к которым добавлены еще 12 квадратов. Всего у него 8 треугольных и 18 квадратных полуправильных граней, а в 24 вершинах сходятся (по четыре в каждой) всего 48 ребер. В форме этого многогранника построено главное здание Национальной библиотеки Беларуси в ее столице Минске.



Важно!

К полуправильным многогранникам причисляют так называемые каталановы тела. Они состоят из одинаковых граней, которые не являются правильными многоугольниками.

Полуправильные многогранники гораздо более многочисленны и разнообразны, чем правильные многогранники. Здесь представлено большинство из них.

Многогранник	Грани	Вершины	Ребра
Кубооктаэдр	8 треугольников 6 квадратов	12	24
Икосододекаэдр	20 треугольников 12 пятиугольников	30	60
Усеченный тетраэдр	4 треугольника 4 шестиугольника	12	18
Усеченный октаэдр	6 квадратов 8 шестиугольников	24	36
Усеченный икосаэдр	12 пятиугольников 20 шестиугольников	60	90
Усеченный куб	8 треугольников 6 восьмиугольников	24	36
Усеченный додекаэдр	20 треугольников 12 десятиугольников	60	80
Ромбокубооктаэдр	8 треугольников 18 квадратов	24	48
Ромбоикосододекаэдр	20 треугольников 30 квадратов 12 пятиугольников	60	120
Ромбоусеченный кубооктаэдр	12 квадратов 8 шестиугольников 6 восьмиугольников	48	72
Ромбоусеченный икосододекаэдр	30 квадратов 20 шестиугольников 12 десятиугольников	120	180
Курносый куб	32 треугольника 6 квадратов	24	60
Курносый додекаэдр	80 треугольников 12 пятиугольников	60	150

Это интересно

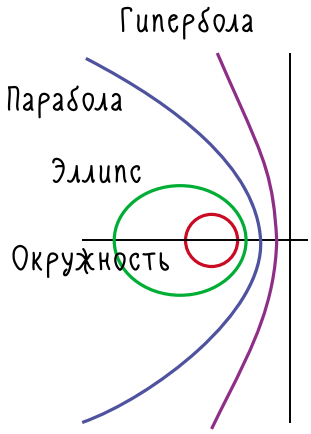
Древние греки полагали, что все в нашем мире состоит из четырех элементов: огня, воды, воздуха и земли. Китайцы, как всегда, пошли дальше: у них основой материальных вещей помимо огня, земли и воды считались металл и дерево. Эту пятерку назвали пятью первостихиями, или пятью первоэлементами, что, согласитесь, вполне подходяще.

Платон в своем труде «Тимей» изложил теорию первоэлементов, основанную на многогранниках. По его представлениям, каждый элемент состоит из атомов определенного вида. При этом атомы имеют форму правильных многогранников. Атомы огня – это тетраэдры, воды – икосаэдры, воздуха – октаэдры, а земли – кубы. Значит, остается незадействованным додекаэдр. Будем считать, что атомы дерева имеют форму именно этого многогранника. Однако сам Платон отвел додекаэдру особое место в своей теории. У него это не какой-то атом, а наглядная модель Вселенной. То есть додекаэдр, как ребенок своих родителей, повторяет форму Вселенной в целом.

Поскольку все правильные многогранники являются симметричными фигурами, можно сказать, что при построении своей картины мира Платон руководствовался идеей о том, что природа построена на математических принципах симметрии. Иными словами, в основе природы лежит симметрия. Конечно, такое представление о строении материи и об атомах неверно. Например, атомы не являются правильными многогранниками, да и твердыми телами тоже не являются. Однако бессмертной оказалась идея о том, что **симметрия определяет строение материи**. Вся современная наука основана на этой идее.

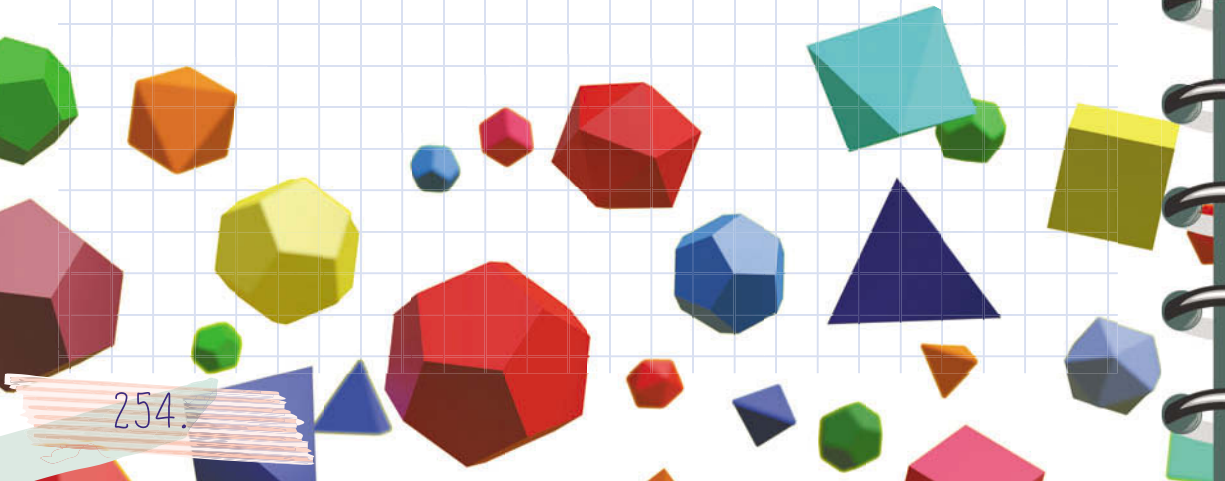
Важно!

Примерно в 350 г. до н. э. греческий математик Менехм открыл особые плоские кривые, названные коническими сечениями. Они называются так потому, что их можно получить, пересекая конус плоскостью. Это окружность, эллипс, парабола и гипербола. Через 18 столетий Кеплер доказал, что именно по коническим сечениям движутся вокруг Солнца планеты.



Проверьте себя и запишите ответ:

1. Какие многогранники соответствуют правильному треугольнику?
2. Какой многогранник соответствует правильному пятиугольнику?
3. Какая фигура называется параллелепипедом?
4. Что представляют собой призмы?
5. Запишите формулу стереометрии, соответствующую теореме Пифагора в планиметрии.
6. В чем заключается закон Эйлера для многогранников?
7. Сколько всего имеется правильных многогранников?
8. От чего зависит количество правильных многогранников?
9. Из каких и скольких граней состоит икосаэдр?
10. Что называют архимедовыми телами?
11. Что называют каталановыми телами?
12. Приведите три примера полуправильных многогранников?
13. Какой полуправильный многогранник самый большой?
14. Какой полуправильный многогранник состоит из 8 треугольников и 18 квадратов?
15. Назовите четыре конических сечения.



1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

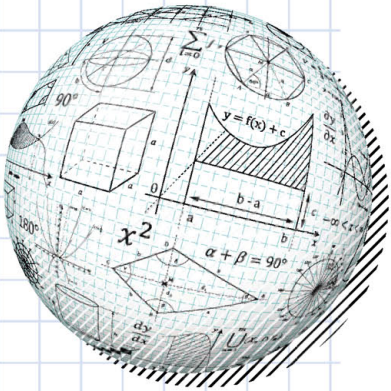
11.

12.

13.

14.

15.



12+

Научно-популярное издание
ғылыми-бұқаралық баспа

СПЕКТОР Анна Артуровна
ВАЙТКЕНЕ Любовь Дмитриевна
ГУСЕВ Игорь Евгеньевич

ВСЁ, ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ, ЧТОБЫ НЕ БЫТЬ СЛАБАКОМ В МАТЕМАТИКЕ, В ОДНОЙ БОЛЬШОЙ КНИГЕ

ДЛЯ СРЕДНЕГО И СТАРШЕГО ШКОЛЬНОГО ВОЗРАСТА

Ответственный за выпуск *И. В. Резько*

Подписано в печать 17.05.2021.
Изготовлено в июле 2021 г.
Произведено в Российской Федерации.

Гарнитура Slimamif. Формат 70x90$^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 18,72.
Тираж экз. Заказ
Тираж экз. Заказ

Общероссийский классификатор продукции ОК-034-2014 (КПЕС 2008);
58.11.1 — книги, брошюры печатные.
ТР ТС 007/2011

ООО «Издательство АСТ».
129085, Российская Федерация, г. Москва, Звёздный бульвар, дом 21, строение 1, комната 705, пом. I, 7 этаж.
www.ast.ru

Адрес места осуществления деятельности по изготовлению продукции:
123112, г. Москва, Пресненская набережная, д. 6, стр. 2, Деловой комплекс «Империя», 14, 15 этаж.

«АСТ баспасы» ЖШҚ
129085, Мәскеу қ., Звёздный бульвары, 21-үй, 1-құрылыс, 705-бөлме, I жай, 7-қабат.
Біздің электрондық мекенжаймыз: www.ast.ru
E-mail: malysh@ast.ru
Интернет-магазин: www.book24.kz
Интернет-дүкен: www.book24.kz
Импортер в Республику Казахстан и Представитель по приему претензий в Республике Казахстан —
ТОО РДЦ Алматы, г. Алматы.
Қазақстан Республикасына импорттаушы және
Қазақстан Республикасында наразылықтарды қабылдау бойынша өкіл —
«РДЦ-Алматы» ЖШС, Алматы қ., Домбровский көш., 3 «а», Б литері, офис 1.
Тел.: 8 (727) 2 51 59 90, 91, факс: 8 (727) 251 59 92 ішкі 107;
E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz, www.book24.kz
Тауар белгісі: «АСТ»
Өндірілген жылы: 2021
Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.
Сертификаттау қарастырылған

Мы в социальных сетях. Присоединяйтесь!
https://vk.com/ast.deti
https://www.instagram.com/ast.deti
https://www.ok.ru/ast.deti
https://www.facebook.com/ast.deti

Как складывать числа с разными знаками? Что собой представляет **прямая пропорциональная** зависимость? Как привести **дроби** к общему знаменателю? Чему равна площадь многоугольника? Как найти **процент** от числа? На эти и многие другие вопросы вы найдете ответы в этой книге-**конспекте** по математике. Она предназначена **для школьников**, которые хотят быть с этой наукой на **«ты»**, но по разным причинам не могут самостоятельно **разобраться** в некоторых темах. Теоретические сведения здесь подаются в наглядной и **доступной форме**, в том **числе** на примере использования их в обыденной **жизни**. Кроме того, приводятся различные интересные **факты**. А чтобы **проверить**, как усвоен материал, в конце каждого раздела есть **вопросы для самопроверки**. И вот уже не родители, а вы будете объяснять им, как умножить **многозначное число** на 11 без калькулятора, как, зная **периметр** и **площадь комнаты**, выбрать новый ковер, **во сколько** обойдется семье покупка телевизора, если он продается с **30-процентной** скидкой, и многое другое.

ISBN 978-5-17-135263-9
9 785171 352639
WWW.AST.RU

Аванта

12+

Присоединяйтесь к нам!
www.ast.ru/redactions/avanta
instagram.com/ast.deti
vk.com/ast.deti
facebook.com/ast.deti
ok.ru/ast.deti