

**Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Заочная физико-техническая школа**

МАТЕМАТИКА

Комплексные числа

Задание для 10-х классов

(2022 – 2023 учебный год)
(факультативное задание)



г. Долгопрудный, 2023

Составитель: С.Е. Городецкий, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание для 10-х классов (2022 – 2023 учебный год), 2023, 32 с.

Дата отправления заданий по математике – 22 мая 2023 г.

Внимание! Данное задание является факультативным, т. е. присылать его в ЗФТШ на проверку не обязательно, но мы настоятельно рекомендуем Вам внимательно проработать его.

Составитель:
Городецкий Сергей Евгеньевич

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**,
тел./факс (498) 744-6351 – **очно-заочное отделение**.
тел. (498) 744-6583 – **очное отделение**.

E mail: edu@zftsh.online

Наш сайт: www.school.mipt.ru

© ЗФТШ, 2023

Все права защищены. Воспроизведение учебно-методических материалов и материалов сайта ЗФТШ в любом виде, полностью или частично, допускается только с письменного разрешения правообладателей.

В элементарной математике изучаются действительные числа. Сначала в процессе счёта возникает так называемый натуральный ряд чисел $1, 2, \dots, n, \dots$. В арифметике вводятся действия сложения и умножения над натуральными числами. Что же касается операций вычитания и деления, то они уже оказываются не всегда возможными на множестве натуральных чисел. Поэтому вводятся множества целых и рациональных чисел.

Та же потребность измерения величин и проведения таких операций, как извлечение корня, решение алгебраических уравнений, приводит к дальнейшему расширению запаса рассматриваемых чисел. Здесь, например, при извлечении корня из положительного числа вводятся иррациональные числа. Однако, решение алгебраических уравнений второй степени и выше привело к необходимости извлекать корень из любого действительного числа: так появились комплексные числа.

§1. Определение комплексных чисел. Операции над комплексными числами

1. Алгебраическая форма комплексного числа. Для того, чтобы извлекать квадратный корень из отрицательного действительного числа, множество действительных чисел было расширено: к нему добавили новое число i , такое что $i^2 = -1$. Операции умножения этого числа на любое действительное число и сложения его с действительным числом привели к понятию комплексного числа. Комплексными числами называют выражения вида $a + bi$, в которых a и b – любые действительные числа, и для которых следующим образом вводится понятие равенства и операции сложения и умножения:

а) два комплексных числа $a + bi$ и $c + di$ равны тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$; (пишут $a + bi = c + di$)

б) суммой чисел $a + bi$ и $c + di$ называется число

$$a + c + (b + d)i;$$

в) произведением чисел $a + bi$ и $c + di$ называется число

$$ac - bd + (ad + bc)i.$$

Таким образом, сложение и умножение комплексных чисел производится согласно формулам:

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i, \quad (1)$$

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i. \quad (2)$$

Комплексные числа принято обозначать одной буквой (чаще всего буквой z или w). Равенство $z = a + bi$ означает, что комплексное число $a + bi$ обозначено буквой z , при этом действительное число a называется *действительной частью* комплексного числа $z = a + bi$ и обозначается $\operatorname{Re} z$; пишут $\operatorname{Re} z = a$ или $\operatorname{Re}(a + bi) = a$. Число b называется *мнимой частью* числа $z = a + bi$ и обозначается $\operatorname{Im} z$; пишут $\operatorname{Im} z = b$ или $\operatorname{Im}(a + bi) = b$. Символ i называется *мнимой единицей*.

Заметим, что операции сложения и умножения над числами вида $a + 0i$ проводятся так же, как над действительными числами. В самом деле, на основании формул (1) и (2) имеем:

$$(a + 0i) + (c + 0i) = a + c + 0i,$$

$$(a + 0i)(c + 0i) = ac + 0i.$$

Таким образом, отождествив число $a + 0i$ с действительным числом a , получим, что каждое действительное число содержится во множестве комплексных чисел и $a = a + 0i$. В частности, число $0 = 0 + 0i$ будем, как обычно, называть нулём, а число $1 = 1 + 0i$ – единицей.

Числа вида $0 + bi$ называют *чисто мнимыми* и обозначаются bi :

$$0 + 5i = 5i, \quad 0 - 2i = -2i.$$

На основании формулы (2) найдём значение выражения $i^2 = i \cdot i$:

$$i^2 = (0 + 1i)(0 + 1i) = -1 + 0i = -1.$$

Т. е.,

$$i^2 = -1. \quad (3)$$

Заметим, что формулу (2) запоминать не нужно, т. к. она получается автоматически, если перемножить двучлены $a + bi$ и $c + di$, а затем на основании формулы (3) заменить i^2 на -1 .

Пример 1. Найдите сумму и произведение комплексных чисел $z_1 = 8 + 3i$ и $z_2 = -5 + 2i$. По формуле (1) находим

$$z_1 + z_2 = 8 - 5 + i(3 + 2) = 3 + 5i.$$

Формально перемножая двучлены $(8 + 3i)$ и $(-5 + 2i)$ и учитывая соотношение (3), имеем

$$z_1 z_2 = (8 + 3i)(-5 + 2i) = -40 - 15i + 16i + 6i^2 = -40 + i - 6 = -46 + i.$$

2. Свойства операций над комплексными числами. Операции сложения (1) и умножения (2) обладают следующими свойствами:

1. *Коммутативность сложения:* $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ для любых комплексных чисел z_1, z_2 .
2. *Ассоциативность сложения:* $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3 .
3. $z + 0 = z$ для любого комплексного числа z .
4. Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует число z такое, что $z_1 + z = z_2$. Это число называется *разностью* чисел z_2 и z_1 и обозначается $z_2 - z_1$.
5. *Коммутативность умножения:* $z_1 z_2 = z_2 z_1$ для любых z_1, z_2 .
6. *Ассоциативность умножения:* $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ для любых z_1, z_2, z_3 .
7. *Дистрибутивный закон:* $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ для z_1, z_2, z_3 .
8. $1 \cdot z = z$ для любого комплексного числа z .

9. Для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 , где $z_2 \neq 0$, существует число z , такое, что $z_2 z = z_1$. Это число называется *частным* комплексных чисел z_1 и z_2 и обозначается $\frac{z_1}{z_2}$. Деление на 0 невозможно.

Все перечисленные свойства операций следуют из определения. Докажем свойства 4 и 9; остальные докажите самостоятельно.

Свойство 4. Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $z = x + yi$. Тогда равенство $z_1 + z = z_2$ запишется в виде $c + di = (a + bi) + (x + yi) = a + x + (b + y)i$. Отсюда следует, что x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a + x = c \\ b + y = d \end{cases}, \text{ откуда } x = c - a, y = d - b \text{ и}$$

$$z_2 - z_1 = (c - a) + (d - b)i \quad (4a)$$

Свойство 9. Пусть опять $z_1 = a + bi$, $z = x + yi$, $z_2 = c + di$, и хотя бы одно из чисел c и d отлично от нуля. Тогда равенство $z z_2 = z_1$ запишется так: $a + bi = (x + yi)(c + di) = xc - yd + (xd + yc)i$. Отсюда x и y удовлетворяют системе уравнений:
$$\begin{cases} cx - dy = a, \\ dx + cy = b. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}, \quad \text{т. е.}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \quad (4б)$$

Пример 2. Найдите разность $z_1 - z_2$ и частное $\frac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел

$$z_1 = -1 + 3i \text{ и } z_2 = 5 - 2i.$$

По формуле (4а) находим разность

$$z_1 - z_2 = (-1 + 3i) - (5 - 2i) = -1 - 5 + (3 - (-2))i = -6 + 5i.$$

По формуле (4б) находим частное:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 \cdot 5 + 3(-2)}{5^2 + (-2)^2} + i \frac{3 \cdot 5 - (-1)(-2)}{5^2 + 2^2} = \frac{-11}{29} + \frac{13}{29}i.$$

В §2 будет указан более простой способ деления комплексных чисел, не требующий запоминания формулы (4б).

Заметим, что понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определены; записи вида $z > 3 + i$ и им подобные лишены всякого смысла. Невозможно перенести понятия «больше» и «меньше» на множество комплексных чисел, так, чтобы при этом сохранились все свойства неравенств, выполняющиеся для действительных чисел (например, сохранение знака неравенства при умножении обеих его частей на положительное число и т. п.). Покажем, например, что числа i и 0 сравнить невозможно.

Предположим, что $i > 0$. Тогда умножая обе части неравенства на i (по предположению $i > 0$, поэтому знак неравенства не меняем), получаем $i^2 > 0$, т. е. $-1 > 0$, что неверно. Предположим, что $i < 0$. Тогда, умножая обе части неравенства на $i < 0$, снова получим, что $i^2 > 0$.

Таким образом, сравнить числа i и 0 невозможно.

Пример 3. Найдите сумму, разность и произведение комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = a - bi$. Находим по формулам (1) и (4а):

$$z_1 + z_2 = a + bi + (a - bi) = 2a, \quad z_1 - z_2 = 2bi.$$

Находим по формуле (2) или формально перемножая двучлены:

$$z_1 z_2 = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

Пусть $z = a + bi$. Тогда число $a - bi$ называется *комплексно сопряжённым* числу $z = a + bi$ и обозначается \bar{z} . $\overline{1 + 2i} = 1 - 2i$. Пример 3 показывает, что сумма двух комплексно сопряжённых чисел $z + \bar{z}$ является всегда числом действительным, а их разность является чисто мнимым числом; произведение $z\bar{z}$ также всегда число действительное и более того, неотрицательное. Ясно также что число, сопряжённое числу \bar{z} равно z : $\overline{\bar{z}} = \overline{a - bi} = a + bi = z$; если z — действительное число $z = a$, то $\bar{z} = a = z$. Кроме того, справедливы следующие утверждения о комплексно сопряжённых числах:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad (5а)$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \quad (5б)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad (5в)$$

$$\overline{z_1 / z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \text{ если } z_2 \neq 0 \quad (5г)$$

Докажем, например (5в). Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Тогда

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{ac - bd + (ad + bc)i} = ac - bd - (ad + bc)i.$$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a - bi)(c - di) = ac - bd + (-ad - bc)i = ac - bd - (ad + bc)i.$$

Из (5в) при $z = z_1 = \underline{z_2}$ следует: $\overline{z^2} = (\bar{z})^2$ и аналогично для любой натуральной степени n : $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$. (5д)

§2. Геометрическое изображение комплексных чисел.

Модуль и аргументы комплексного числа

1. Комплексная плоскость. Рассмотрим прямоугольную систему координат на плоскости. Каждое комплексное число $z = a + ib$ задаётся парой действительных чисел $(a; b)$. Эта же пара чисел может рассматриваться в качестве координат точки $M(a, b)$ на координатной плоскости. Поэтому каждому комплексному числу $z = a + ib$ поставим в соответствие точку $M(a, b)$ координатной плоскости, т. е. точку, абсцисса которой равна $\operatorname{Re} z = a$, а ордината равна $\operatorname{Im} z = b$. Обратно, каждой точке плоскости с координатами (a, b) поставим в соответствие комплексное число $z = a + bi$.

Так построено взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и точками плоскости, на которой выбрана система координат. Сама координатная плоскость называется при этом *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, т. к. на ней расположены точки, соответствующие комплексным числам $a + i0$, т. е. действительным числам. Ось ординат называется *мнимой осью* – на ней лежат точки, соответствующие чисто мнимым комплексным числам $0 + bi$.

Не менее важной и удобной является интерпретация комплексного числа $a + bi$ как вектора \overline{OM} с началом в точке $O(0, 0)$ и концом в точке $M(a, b)$ (см. рис. 1). Так каждому вектору плоскости с началом в точке $O(0, 0)$ концом в точке $M(a, b)$ соответствует комплексное число $a + bi$ и наоборот. При этом нулевому вектору соответствует комплексное число $0 + 0i$.

2. Модуль комплексного числа.

Определение. Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется длина вектора, соответствующего этому числу. Модуль обозначается $|z|$ или буквой r . Применяя теорему Пифагора, получим, что

$$|OM| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{см. рис. 1}).$$

Если $z = a + 0i$, то $|z| = \sqrt{a^2 + 0} = |a|$, т. е. для действительного числа модуль совпадает с абсолютной величиной этого числа.

Очевидно, что $|z| > 0$ для всех $z \neq 0$; $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0 + 0i = 0$.

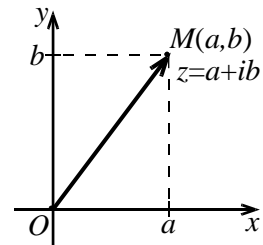


Рис. 1

Перечислим основные свойства модуля комплексного числа:

$$|\bar{z}| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (\text{см. рис. 2}). \quad (6.1)$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2 \quad (\text{из примера 3}) \quad (6.2)$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad (6.3)$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{если } z_2 \neq 0 \quad (6.4)$$

Докажем, например, (6.3). Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Тогда $z_1 z_2 = ac - bd + (ad + bc)i$,

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \\ &= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 - 2acbd + (ad)^2 + (bc)^2 + 2adbc} = \\ &= \sqrt{c^2(a^2 + b^2) + d^2(a^2 + b^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = |z_1| \cdot |z_2|. \end{aligned}$$

Используя свойства модуля, можно получить более простую формулу для деления комплексных чисел, чем (4б). Число $\frac{1}{z}$ запишем в виде:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \left(\frac{1}{z_2} \right) = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad \text{при } z_2 \neq 0. \quad (7)$$

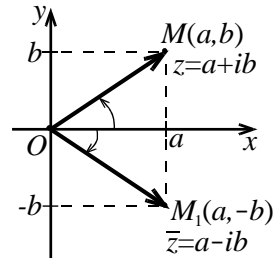


Рис. 2

Формула (7) сводит операцию деления комплексных чисел z_1 и z_2 к умножению чисел z_1 и \bar{z}_2 и делению этого произведения на действительное число $|z_2|^2$.

Пример 4. Найдите частное $\frac{2 - 3i}{-1 + 5i}$.

По формуле (7) имеем:

$$\frac{2 - 3i}{-1 + 5i} = \frac{(2 - 3i)(-1 - 5i)}{|-1 + 5i|^2} = \frac{-2 + 15i^2 + 3i - 10i}{1^2 + 5^2} = -\frac{17}{26} - \frac{7}{26}i.$$

3. Геометрический смысл сложения, вычитания и модуля разности двух комплексных чисел. Изображение комплексных чисел с помощью векторов удобно тем, что при этом операции сложения и вычитания чисел получают простое геометрическое толкование. Так, при сложении комплексных чисел отдельно складываются их действительные и мнимые части: $z = z_1 + z_2 = a + bi + c + di = a + c + (b + d)i$. Так же выполняется и операция сложения векторов $\overrightarrow{OM_1}(a, b)$ и $\overrightarrow{OM_2}(c, d)$: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = (a + c, b + d)$. Иначе: если числу z_1 соответствует вектор $\overrightarrow{OM_1}$, а числу z_2 – вектор $\overrightarrow{OM_2}$, то числу $z_1 + z_2$ соответствует вектор $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ (см. рис. 3). Это же относится и к разности комплексных чисел z_1 и z_2 : $z = z_1 - z_2 = a - c + (b - d)i$ и $\overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = (a - c, b - d)$, т. е. числу $z_1 - z_2$ соответствует вектор $\overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$. При этом число

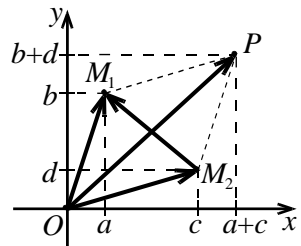


Рис. 3

$|z_1 - z_2|$ есть, по определению модуля, длина вектора $z_1 - z_2$. (На рис. 3 $|z_1 - z_2|$ есть длина вектора $\overrightarrow{M_2M_1}$). Таким образом, *модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам*. Теперь, используя геометрический смысл операций с комплексными числами, решим следующие задачи.

Пример 5. Найдите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию: а) $|z - i| = 1$;

б) $1 < |z + 3 + i| < 3$; в) $|z - 2 + i| \geq |z + 3 - 4i|$;

г) $|z^2| - 6z - \overline{6z} = 0$; д) $|z - 1| = 2|z + 2|$.

а) Условию $|z - i| = 1$ удовлетворяют те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки i на расстояние, равное 1. Такие точки лежат на окружности радиуса 1 с центром в точке i (см. рис. 4).

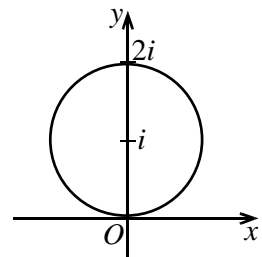


Рис. 4

б) Здесь $|z+3+i|=|z-(-3-i)|$. Условию $1 < |z+3+i| < 3$ удовлетворяют те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки $(-3, -i)$ на расстояние, большее 1, но меньшее 3. Такие точки расположены внутри кольца, образованного двумя концентрическими окружностями с центром в точке $(-3, -1)$ и радиусами $R_1=1$, $R_2=3$ (рис. 5).

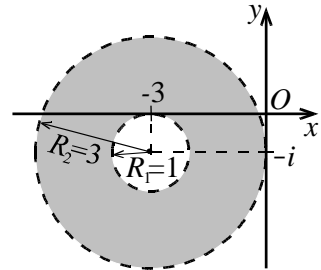


Рис. 5

в) Рассмотрим сначала равенство $|z-2+i|=|z+3-4i|$. Перепишем его в виде $|z-(2-i)|=|z-(-3+4i)|$, т. е. расстояние от точки z до точки $z_1=2-i$ равно расстоянию от точки z до точки $z_2=-3+4i$. Из геометрии известно, что это серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки $M_1(2; -1)$ и $M_2(-3; 4)$. На рис. 6 это прямая l . Тогда точки, удовлетворяющие неравенству $|z-2+i| \geq |z+3-4i|$, лежат на плоскости ближе к точке M_2 , чем к точке M_1 , т. е. на прямой l или выше неё.

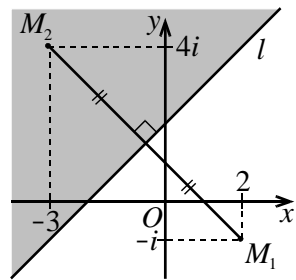


Рис. 6

г) Пусть $z=x+iy$. Тогда равенство $|z|^2 - 6z - 6\bar{z} = 0$ примет вид $x^2 + y^2 - 6(x+iy) - 6(x-iy) = 0$. Отсюда $x^2 + y^2 - 12x = 0$, или $(x-6)^2 + y^2 = 36$. Это уравнение окружности с центром в точке $M(6; 0)$ и радиусом $R=6$ (см. рис. 7).

д) Пусть $z=x+iy$. Тогда

$$\begin{aligned} |x-1+iy| &= 2|x+2+iy| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} &= 2\sqrt{(x+2)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 &= 4(x^2 + 4x + 4 + y^2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 18x + 3y^2 + 15 &= 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + y^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 + y^2 = 4. \end{aligned}$$

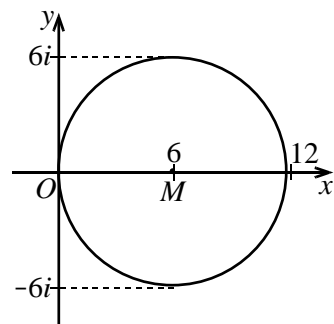


Рис. 7

Это окружность с центром в точке $M(-3;0)$ и радиусом 2 (см. рис. 8). Т. е. точки лежат на окружности радиуса 2 с центром в точке $z = -3$.

4. Аргументы комплексного числа. Аргументом комплексного числа $z = a + bi$ ($z \neq 0$) называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $z = \overrightarrow{OM}(a, b)$; величина угла считается положительной, если отсчёт угла производится против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчёт производится по часовой стрелке. Для числа $z = 0$ аргумент не определён.

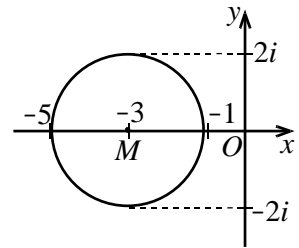


Рис. 8

Для обозначения того, что число φ является аргументом числа $z = a + bi$, пишут $\varphi = \arg z$ или $\varphi = \arg(a + bi)$. (См. рис. 9).

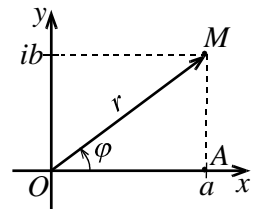


Рис. 9

Заметим, что заданием модуля и аргумента комплексное число $z = a + bi$ определяется однозначно. Пусть $|\overrightarrow{OM}| = r$; тогда $a = \operatorname{Re} z = r \cos \varphi$ и $b = \operatorname{Im} z = r \sin \varphi$.

С другой стороны, если задано комплексное число, то модуль этого числа всегда определён однозначно, в отличие от аргумента, который определяется неоднозначно: если φ – некоторый аргумент числа z , то углы $\varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ являются аргументами того же числа z . Например, аргументами числа

$(1 - i)$ являются углы $-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{15\pi}{4}$ и т. д. (см. рис. 10).

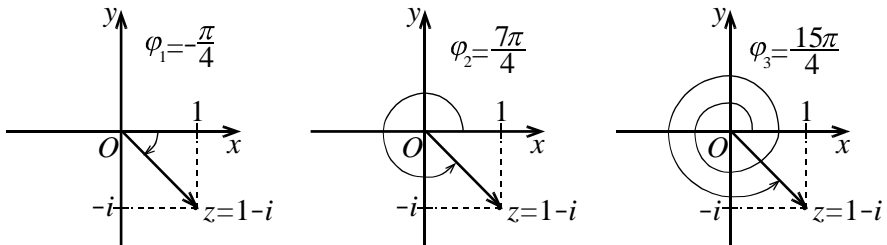


Рис. 10

Таким образом, для каждого числа $z \neq 0$ имеется бесконечное множество аргументов, любые два из которых отличаются друг от друга на число, кратное 2π .

Если комплексное число z задано в алгебраической форме: $z = a + bi$ и $\varphi = \arg z$, то справедливы равенства (см. рис. 9):

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{|z|}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{|z|}. \end{cases} \quad (8)$$

Из (8) также следует: если $\varphi = \arg(a + bi)$, $a \neq 0$, то $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$.

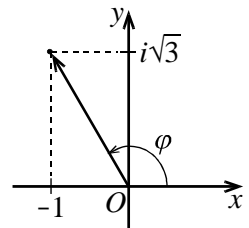
При решении задач на нахождение аргумента конкретного комплексного числа $z = a + bi$ удобно использовать *геометрическую интерпретацию* комплексного числа z для определения той четверти, где находится точка $z = a + bi$, а затем воспользоваться одним из уравнений (8). Заметим, что аргументы чисел z и \bar{z} , $z \neq 0$, связаны соотношением $\arg \bar{z} = -\arg z$ (см. рис. 2).

Пример 6. Найдите аргументы числа

а) $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$; б) $z_2 = -1 - i$.

а) Так как $\operatorname{Re} z_1 = -1 < 0$, $\operatorname{Im} z_1 = \sqrt{3} > 0$, то точка $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ лежит во II четверти. Поэтому надо найти решение одного из уравнений (8), которое является углом II четверти. Получаем

$$\cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = -\frac{1}{2}, \quad \varphi_1 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



б) Здесь $\operatorname{Re} z_2 = -1 < 0$, $\operatorname{Im} z_2 = -1 < 0$, т. е. точка $z_2 = -1 - i$ лежит в III четверти (см. рис.). Следовательно, надо найти такое решение уравнения

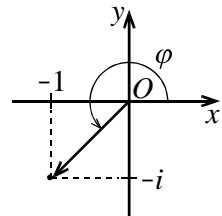
$$\cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{-1} = 1, \quad \text{которое является углом III четверти.}$$

Получаем $\varphi_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что если $a = 0$, (тогда $z = bi$), то либо

$$\arg z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\text{если } b > 0), \quad \text{либо}$$

$$\arg z = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\text{если } b < 0).$$



§3. Различные формы записи комплексных чисел.

Операции над комплексными числами

1. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Рассмотрим другую форму записи комплексных чисел. Пусть r – модуль, а φ – какой-либо из аргументов комплексного числа $z = a + bi$, то есть $r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arg(a + bi)$. Тогда из формулы (8) следует, что $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$, и,

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Запись комплексного числа в виде $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ называется *тригонометрической формой*.

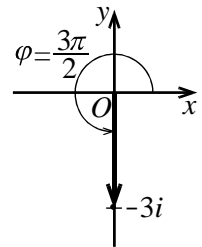
Тригонометрическая форма записи комплексных чисел во многих случаях оказывается более удобной, чем алгебраическая.

Для того, чтобы перейти от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической, достаточно найти его модуль и *один* из аргументов.

Пример 7. Запишите число в тригонометрической форме: а) $z_1 = -3i$;

б) $z_2 = \sqrt{3} - i$.

а) Отметим число $z_1 = -3i$ на комплексной плоскости (см. рис.). Этому числу соответствует точка $M(0; -3)$. $|z_1| = |OM| = 3$. В качестве аргумента z_1 можно выбрать $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. (Угол поворота изображён на

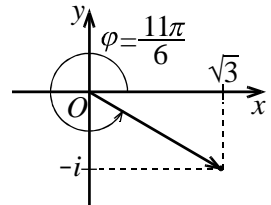


рисунке). Значит, $-3i = 3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Находим модуль

$$r = |z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2.$$

Находим один из аргументов; так как $\operatorname{Re} z_2 = \sqrt{3} > 0$, $\operatorname{Im} z_2 = -1 < 0$, то число $\sqrt{3} - i$ лежит в IV четверти. Поэтому надо найти такое решение уравнения $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{\sqrt{3}}$, которое является



углом в IV четверти – например, это $\varphi = \frac{11\pi}{6}$. Тогда

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right).$$

Пример 8. Запишите число в тригонометрической форме:

а) $z_1 = 2(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)i$; б) $z = 1 + \cos 2\alpha - i \sin 2\alpha, \left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение. а) $z_1 = 2(-\sin 40^\circ + i \cos 40^\circ)$, но эта форма не является тригонометрической формой числа z_1 . Имеем $|z_1| = \sqrt{4(\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ)} = 2$. Согласно определению $\arg z$ нам надо найти такой угол φ , для которого $\begin{cases} \cos \varphi = -\sin 40^\circ < 0 \\ \sin \varphi = \cos 40^\circ > 0 \end{cases}$. Тогда φ лежит во II четверти и из тригонометрических формул приведения имеем $\varphi = 90^\circ + 40^\circ = 130^\circ$. Отсюда тригонометрическая форма числа z_1 следующая: $z_1 = 2(\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ)$.

б) Здесь $|z|^2 = (1 + \cos 2\alpha)^2 + \sin^2 2\alpha = 1 + 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 2 + 2\cos 2\alpha = 4\cos^2 \alpha$; отсюда $|z_2| = -2\cos \alpha$ (т. к. α – угол III четверти). $\operatorname{tg}(\arg z_2) = -\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = -\frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(-\alpha)$, откуда $\arg z_2 = -\alpha + \pi k$. Так как $\operatorname{Re} z = 1 + \cos 2\alpha > 0$, $\operatorname{Im} z = -\sin 2\alpha < 0$, то число z лежит в IV четверти, и в качестве аргумента можно выбрать $\arg z_2 = \pi - \alpha$.

Тогда тригонометрическая форма числа z_2 :

$$z_2 = -2\cos \alpha \cdot (\cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha)).$$

2. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.

Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.

Тогда $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \cdot (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)) =$
 $= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$ (9)

Таким образом, модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения есть сумма аргументов сомножителей.

Пусть $z_2 \neq 0$, тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$
 (10)

Таким образом, модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент частного является разностью аргументов делимого и делителя.

3. Возведение в степень и извлечение корня

Формула (9) для произведения двух комплексных чисел может быть обобщена на случай n сомножителей. Используя метод математической индукции, нетрудно показать, что если $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ – аргументы чисел z_1, z_2, \dots, z_n соответственно, то $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n = \arg(z_1 z_2 \dots z_n)$,

$$|z_1| |z_2| \dots |z_n| = |z_1 z_2 \dots z_n|.$$

Отсюда, как частный случай, получается формула, дающая правило возведения комплексного числа $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ в целую положительную степень:

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (11)$$

Таким образом, при возведении комплексного числа в степень с натуральным показателем его модуль возводится в степень с тем же показателем, а аргумент умножается на показатель степени.

Формулу (11) называют *первой формулой Муавра*.

Пример 9. Найдите z^9 , если $z = -1 + \sqrt{3}i$.

Так как $|-1 + \sqrt{3}i| = 2$, а одним из аргументов является $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ (см. пример 6 на стр. 12), то

$$z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Применяя формулу (11), получаем

$$z^9 = 2^9 \left(\sin \frac{18\pi}{3} + i \sin \frac{18\pi}{3} \right) = 2^9 (\cos 6\pi + i \sin 6\pi) = 2^9 (1 + 0i) = 512.$$

Формулы операций над комплексными числами в тригонометрической форме позволяют дать геометрическую интерпретацию умножения или деления на комплексное число. Пусть число z записано в тригонометрической форме: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ и ему отвечает на комплексной плоскости вектор \overline{OM} ($r \cos \varphi, r \sin \varphi$). Тогда при умножении этого числа z , например, на число

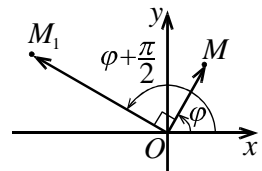


Рис. 11

$2i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$, получим число $z_1 = 2iz$, которому соответствует вектор $\overline{OM_1}$. При этом $|\overline{OM_1}| = |2i| |\overline{OM}| = 2r$, а $\arg z_1 = \arg z + \arg (2i) = \arg z + \frac{\pi}{2}$. Таким образом, вектор $\overline{OM_1}$ получается из вектора \overline{OM} с помощью двух преобразований: поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ и увеличения длины в 2 раза. Формулы (9) – (11) также часто

упрощают операции умножения и деления комплексных чисел. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 10. Выполните арифметические операции:

$$\frac{(2\sin 27^\circ - 2i\cos 153^\circ)^3 i^{103}}{-\cos 39^\circ - i\sin 39^\circ}.$$

Решение. Пусть $z = \frac{z_1^3}{z_2} i^{103}$, где $z_1 = 2(\sin 27^\circ - i\cos 153^\circ)$,

$z_2 = -(\cos 39^\circ + i\sin 39^\circ)$. Число z_1 представим в тригонометрической

форме. $|z_1| = \sqrt{4\sin^2 27^\circ + 4(-\cos 153^\circ)^2} = 2\sqrt{\sin^2 27^\circ + \cos^2 27^\circ} = 2$.

$\operatorname{Re} z_1 = 2\sin 27^\circ > 0$, $\operatorname{Im} z_1 = -2\cos 153^\circ > 0$, т. е. $\varphi_1 = \arg z_1$ – угол I четверти. По формулам (8) имеем:

$$\cos \varphi_1 = \frac{2\sin 27^\circ}{2} = \sin 27^\circ, \quad \sin \varphi_1 = \frac{-2\cos 153^\circ}{2} = -\cos 153^\circ = \cos 27^\circ.$$

Тогда по тригонометрическим формулам приведения $\varphi_1 = 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$ и $z_1 = 2(\cos 63^\circ + i\sin 63^\circ)$. Значит,

$z_1^3 = 2^3(\cos 189^\circ + i\sin 189^\circ)$. Далее $|z_2| = \sqrt{(-\cos 39^\circ)^2 + (-\sin 39^\circ)^2} = 1$.

$\operatorname{Re} z_2 = -\cos 39^\circ < 0$. $\operatorname{Im} z_2 = -\sin 39^\circ < 0$. Тогда $\varphi_2 = \arg z_2$ – угол в III четверти и из формул (8): $\cos \varphi_2 = -\cos 39^\circ$, $\sin \varphi_2 = -\sin 39^\circ$, откуда

$$\varphi_2 = 180^\circ + 39^\circ = 219^\circ, \quad z_2 = \cos 219^\circ + i\sin 219^\circ.$$

$$i^{103} = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2} \right)^{103} = \cos \frac{103\pi}{2} + i\sin \frac{103\pi}{2} = \cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i\sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) = -i.$$

В итоге получаем:

$$\begin{aligned} z &= \frac{8(\cos 189^\circ + i\sin 189^\circ)(-i)}{\cos 219^\circ + i\sin 219^\circ} = -8i(\cos(189^\circ - 219^\circ) + i\sin(189^\circ - 219^\circ)) = \\ &= -8i(\cos(-30^\circ) + i\sin(-30^\circ)) = -8i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -4 - 4\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Пример 11. Вычислите сумму $S = 1 + \cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi$.

Решение. Если $\cos \varphi = 1$, то $\varphi = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Тогда $\cos 2\varphi = \cos 3\varphi = \dots = \cos n\varphi = 1$ и $S = n + 1$. Рассмотрим такое φ , что $\cos \varphi \neq 1$. Пусть $U = S + iT$, где $S = 1 + \cos \varphi + \dots + \cos n\varphi$, $T = \sin \varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin n\varphi$. Тогда $S = \operatorname{Re}(U)$. Комплексное число U имеет вид:

$$\begin{aligned} U &= 1 + (\cos \varphi + i\sin \varphi) + (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \dots + (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \\ &= (\text{из 11}) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n, \quad \text{где } z = \cos \varphi + i\sin \varphi. \end{aligned}$$

Тогда U – это сумма $(n+1)$ членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = z$, т. е.

$$U = \frac{1 \cdot (q^{n+1} - 1)}{q - 1} = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \frac{\cos((n+1)\varphi) - 1 + i \sin((n+1)\varphi)}{\cos \varphi - 1 + i \sin \varphi}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S = \operatorname{Re} U &= \operatorname{Re} \left(\frac{(\cos(n+1)\varphi) - 1 + i \sin((n+1)\varphi)(\cos \varphi - 1 - i \sin \varphi)}{(\cos \varphi - 1)^2 + \sin^2 \varphi} \right) = \\ &= \frac{\cos((n+1)\varphi) \cos \varphi - \cos((n+1)\varphi) - \cos \varphi + 1 + \sin((n+1)\varphi) \sin \varphi}{2 - 2 \cos \varphi} = \\ &= \frac{\cos n\varphi - \cos((n+1)\varphi) - \cos \varphi + 1}{2 - 2 \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Пример 12. Дано число $U = \left(\sin \frac{\pi}{20} + i \cos \frac{\pi}{20} \right)^5$.

а) Запишите число U в тригонометрической и алгебраической форме.

б) Изобразите на комплексной плоскости множество D комплексных чисел z , таких что $\left| U(z + \sqrt{2}U) \right| < 1$.

в) Изобразите на комплексной плоскости множество D_1 комплексных чисел z_1 вида $\{z_1 = z(1-i), z \in D\}$.

г) Найдите наибольшее и наименьшее значение $|z|$ для всех чисел z , таких что $\left| U(z + \sqrt{2}U) \right| = 1$.

Решение. а) Число $U = z_0^5$, где $z_0 = \sin \frac{\pi}{20} + i \cos \frac{\pi}{20}$. Запишем z_0 в тригонометрической форме.

$|z_0| = \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{20} + \cos^2 \frac{\pi}{20}} = 1$. $\operatorname{Re} z_0 = \sin \frac{\pi}{20} > 0$, $\operatorname{Im} z_0 = \cos \frac{\pi}{20} > 0$, т. е. $\varphi = \arg z_0$ – угол I четверти и по формулам (8)

$\cos \varphi = \sin \frac{\pi}{20}$, $\sin \varphi = \cos \frac{\pi}{20}$; тогда $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{20} = \frac{9\pi}{20}$,

$z_0 = \cos \frac{9\pi}{20} + i \sin \frac{9\pi}{20}$. Теперь ответ

$$\text{а) } U = z_0^5 = \cos\left(\frac{45\pi}{20}\right) + i \sin\left(\frac{45\pi}{20}\right) = \cos\frac{9\pi}{4} + i \sin\frac{9\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

б) По свойству модуля имеем:

$$\left|U(z + \sqrt{2}U)\right| = |U||z + \sqrt{2}U| = |z + \sqrt{2}U|, \text{ т. к. } |U| = 1.$$

Тогда множество D задаётся условием, $|z + \sqrt{2}U| < 1$, т. е. как и в примере 4 выше D – это множество точек z на комплексной плоскости, расстояние от которых до точки $M = -\sqrt{2}U = -1 - i$ меньше 1. Это множество: круг с центром в точке $M(-1; -1)$ и радиусом $r = 1$. На рис. 12а множество закрашено.

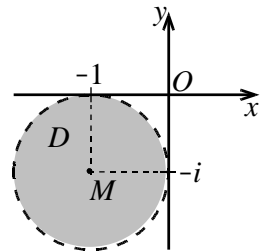


Рис. 12а

$$\text{в) } |1 - i| = \sqrt{2}, \arg(1 - i) = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k.$$

Тогда согласно указанному выше геометрическому смыслу умножения на комплексное число $1 - i$: модуль всех чисел $z \in D$ увеличивается в $\sqrt{2}$ раз. Аргументы всех этих чисел изменяются на $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Поскольку $-\sqrt{2}U(1 - i) = -(1 + i)(1 - i) = -2$, то образом точки M – центра круга D будет точка $M_1(-2, 0)$. Тогда D_1 – это внутренняя часть круга с центром в точке M_1 и радиуса $r_1 = r\sqrt{2} = \sqrt{2}$. На рис. 12б множество заштриховано.

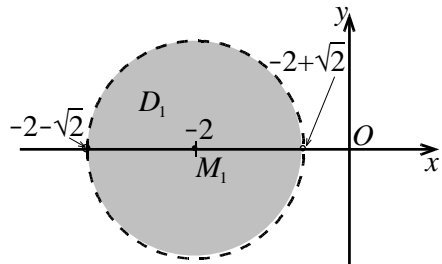


Рис. 12б

г) Согласно п. б) множество $D_2 : \left|U(z + \sqrt{2}U)\right| = 1$ задаётся условием $|z + \sqrt{2}U| = 1$, или $|z - (-1 - i)| = 1$, т. е. D_2 – это окружность – граница круга D . Из тригонометрической формы записи комплексного числа следует, что все числа z , лежащие на единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$, можно задать в виде $\{z = \cos\varphi + i \sin\varphi, \varphi \in [0; 2\pi]\}$. Тогда числа z , лежащие на окружности D_2 с центром в точке $-1 - i$ запишем в виде:

$$\{z = -1 - i + \cos\varphi + i \sin\varphi, \varphi \in [0; 2\pi]\} \text{ или } z = -1 + \cos\varphi + i(-1 + \sin\varphi).$$

В этом случае $|z|^2 = (-1 + \cos \varphi)^2 + (-1 + \sin \varphi)^2 =$

$$= 1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + 1 - 2 \sin \varphi + \sin^2 \varphi = 3 - 2(\cos \varphi + \sin \varphi).$$

По формулам тригонометрии выражение $\cos \varphi + \sin \varphi$ можно предста-

вить в виде: $\cos \varphi + \sin \varphi = \sqrt{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$. Тогда при $\varphi \in [0; 2\pi]$ значе-

ния $\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \in [-1; 1]$ и $-\sqrt{2} \leq \cos \varphi + \sin \varphi \leq \sqrt{2}$. Значит наибольшее

(наименьшее) значение $|z|$ при $z \in D_2$ равно наибольшему (наимень-

шему) значению $\sqrt{3 - 2(\cos \varphi + \sin \varphi)}$ при $\varphi \in [0; 2\pi]$. Тогда ответ
г) наибольшее значение $|z|$ равно $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$, наименьшее зна-

чение $|z|$ равно $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

4. Извлечение корня из комплексного числа

Перейдём к операции извлечения корня данной степени из комплексного числа. Число z называется *корнем степени n* , $n \in \mathbb{N}$, из числа ω (обозначается $\sqrt[n]{\omega}$), если $z^n = \omega$.

Таким образом, для того, чтобы извлечь корень степени n из числа ω , нужно решить уравнение $z^n = \omega$. Если $\omega = 0$, то при любом n уравнение $z^n = 0$ имеет единственное решение $z = 0$. Пусть теперь $\omega \neq 0$.

Представим z и ω в тригонометрической форме: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $\omega = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$. Тогда уравнение $z^n = \omega$

примет вид: $(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$. Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на число, кратное 2π . Следовательно,

$r^n = r_0$, $n\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $r = \sqrt[n]{r_0}$, $\varphi = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, все решения уравнения $z^n = \omega$ даются формулой:

$$z_k = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right), k = 0, 1, \dots, (n-1) \quad (12)$$

В самом деле, придавая числу k в формуле (12) целые значения, отличные от $0, 1, \dots, (n-1)$, не получим других комплексных чисел. Например, при $k = n$ получаем

$$z_n = \sqrt[n]{r_0} \left(\left(\cos \frac{\varphi_0}{n} + 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi_0}{n} + 2\pi \right) \right) = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \frac{\varphi_0}{n} + i \sin \frac{\varphi_0}{n} \right) = z_0.$$

Формула (12) называется второй формулой Муавра. Таким образом, если $\omega \neq 0$, то существует ровно n корней степени n из числа ω . В частности, если $n = 2$, то уравнение $z^2 = \omega$ имеет два корня:

$$z_0 = \sqrt{r_0} \left(\cos \frac{\varphi_0}{2} + i \sin \frac{\varphi_0}{2} \right), \quad z_1 = \sqrt{r_0} \left(\cos \left(\frac{\varphi_0}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi_0}{2} + \pi \right) \right) = -z_0,$$

т. е. эти корни симметричны относительно начала координат.

Отметим также, что при извлечении квадратного корня из действительного положительного числа x мы получаем два значения $\pm\sqrt{x}$, а при извлечении корня из действительного отрицательного числа x — два значения $\pm i\sqrt{-x}$. При $n > 2$ все значения корня из действительного положительного числа x имеют вид:

$$z_k = \sqrt[n]{x} \left(\cos \frac{2\pi}{n} k + i \sin \frac{2\pi}{n} k \right), \quad k = 0, 1, \dots, (n-1).$$

Здесь $z_0 = \sqrt[n]{x}$ — арифметическое значение корня. Если при представлении числа в тригонометрической форме получаются не табличные значения углов, то для извлечения корня удобнее использовать приём, применённый ниже в п.1 §4.

Также из формулы (12) следует, что если $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, то точки, изображающие все корни уравнения $z^n = \omega$, являются вершинами правильного n — угольника, вписанного в окружность с центром в точке $z = 0$ и радиусом $\sqrt[n]{|\omega|}$.

Пример 13. Найдите все значения а) $\sqrt[3]{-8}$,

б) $\sqrt[4]{-1 + \sqrt{3}i}$.

Решение. а) Запишем число $\omega = -8$ в тригонометрической форме: $\omega = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$.

Применяя формулу (12) получаем:

$$z_k = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} k \right) \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Следовательно: $z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + \sqrt{3}i$, $z_1 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$,

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3}i. \quad \text{Точки, соответствующие числам}$$

z_0, z_1, z_2 находятся в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 2 с центром в точке $z = 0$ (см. рис. 13а).

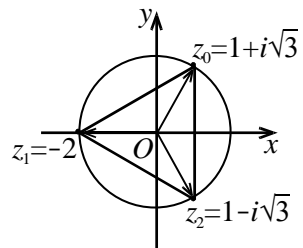


Рис. 13а

б) Из примера 9 тригонометрическая форма числа $\omega = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Тогда по формуле (12)

$$z_k = \sqrt[4]{2} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{12} + \frac{2\pi}{4}k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{12} + \frac{2\pi}{4}k\right) \right), k = 0, 1, 2, 3. \quad \text{т. е.}$$

$$z_0 = \sqrt[4]{2} \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right),$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6} \right) = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right),$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} \right) = -\sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right),$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2} \left(\cos\frac{10\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi}{6} \right) = -\sqrt[4]{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right).$$

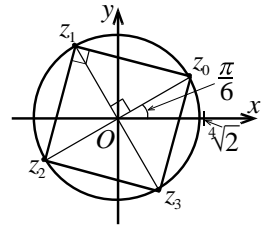


Рис. 13б

Эти точки – вершины квадрата, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[4]{2}$ с центром в точке $z = 0$ (см. рис. 13б).

§4. Алгебраические уравнения

1. Квадратные уравнения. В школьном курсе алгебры рассматривались квадратные уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \quad (13)$$

с действительными коэффициентами a, b, c . Там было показано, что если дискриминант уравнения (13) неотрицателен, то решения такого уравнения даются формулой

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{где } D = b^2 - 4ac \geq 0. \quad (14)$$

В случае, если $D < 0$, говорилось, что уравнение не имеет решений.

Для вывода формулы (14) использовался приём выделения квадрата из трёхчлена с последующим разложением левой части уравнения на линейные множители:

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} \right),$$

откуда и получалась формула (14). Очевидно, что все эти выкладки останутся справедливыми и в том случае, когда a, b, c являются комплексными числами, а корни уравнения отыскиваются на множестве комплексных чисел.

Таким образом, на множестве комплексных чисел уравнение

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0$$

всегда разрешимо. Если $D = b^2 - 4ac = 0$, уравнение имеет один корень (2 совпадающих корня или один корень кратности 2); при $D \neq 0$ уравнение имеет два корня. Во всех случаях для корней квадратного уравнения справедлива формула $z = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, где под \sqrt{D} подразумеваются все значения корня¹.

Пример 14. Решите уравнение $z^2 + z + 1 = 0$.

По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z = \frac{-1 + \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

Так как $\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$, то $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

При решении квадратного уравнения с комплексными коэффициентами число D в формуле (14) также будет комплексным. Тогда, чтобы вычислить \sqrt{D} по формуле (12) надо приводить число D к тригонометрической форме. При вычислении квадратного корня может быть более удобным другой способ, не требующий использовать тригонометрическую форму. Покажем как это делать. Пусть число ω имеет вид $\omega = u + iv$, $v \neq 0$. Тогда числа $\sqrt{\omega}$ – это решения уравнения $z^2 = \omega$. Если z – комплексное число вида $z = x + iy$, то уравнение $z^2 = \omega$ примет вид $(x + iy)^2 = u + iv$ или $x^2 - y^2 + 2xyi = u + vi$. Отсюда, приравнявая вещественные и мнимые части, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = u \\ 2xy = v. \end{cases} \quad (15a)$$

Для решения этой системы можно выразить y из второго уравнения:

$y = \frac{v}{2x}$ (т. к. $v \neq 0$, то $x \neq 0$ и $y \neq 0$). Тогда первое уравнение примет

вид $x^2 - \frac{v^2}{4x^2} = u$ или $4x^4 - 4ux^2 - v^2 = 0$. (15б)

Это биквадратное уравнение; сделав в нём замену переменной $t = x^2$ (т. к. x – действительное число, то t – действительное число и $t \geq 0$), получим квадратное уравнение для переменной t . Нам нужен только неотрицательный корень этого уравнения $t_1 \geq 0$. Далее $x_{1,2} = \pm \sqrt{t_1}$,

¹ Если D – действительное положительное число, то \sqrt{D} , в отличие от действительных чисел, принимает два значения. Например, $\sqrt{4} = \pm 2$.

$y_{1,2} = \frac{v}{2x_{1,2}}$ и $z_{1,2} = x_{1,2} + iy_{1,2}$ – два значения $\sqrt{\omega}$, полученные в алгебраической форме.

Пример 15. Решите уравнение $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$.

По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z = \frac{-(2i - 3) + \sqrt{(2i - 3)^2 - 4(5 - i)}}{2} = \frac{3 - 2i + \sqrt{-15 - 8i}}{2}.$$

Для определения всех значений $x + iy = \sqrt{-15 - 8i}$ по формуле (15а)

имеем систему $\begin{cases} x^2 - y^2 = -15 \\ 2xy = -8 \end{cases}$, далее получаем $4x^4 + 60x^2 - 64 = 0$, от-

куда $x^2 = 1$ или $x^2 = -16$. Значит, $x_{1,2} = \pm 1$, $y_{1,2} = -\frac{8}{2x_{1,2}} = \mp 4$. Таким

образом, $\sqrt{-15 - 8i} = \pm(1 - 4i)$.

Следовательно, $z_1 = \frac{3 - 2i + (1 - 4i)}{2} = 2 - 3i$, $z_2 = \frac{3 - 2i + (-1 + 4i)}{2} = 1 + i$.

2. Уравнения высших степеней. Формула (12) полностью решает вопрос о существовании и определении всех корней уравнения $z^n = a$, т. е. двучленного уравнения степени n . Гораздо сложнее обстоит дело в случае общего алгебраического уравнения степени n :

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0, \quad (16)$$

где a_0, \dots, a_n – заданные комплексные числа, $a_n \neq 0$.

Число z_0 называется корнем многочлена $P_n(z)$ или решением уравнения (16), если $P_n(z_0) = 0$.

При решении алгебраических уравнений полезна следующая теорема, называемая *теоремой Безу*:

остаток от деления многочлена $P_n(z)$ на $(z - z_0)$ равен $P_n(z_0)$.

Действительно, $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0) + r(z)$, где остаток $r(z)$, если он не равен нулю, является многочленом, степень которого меньше степени делителя $z - z_0$, т. е. степень остатка $r(z)$ равна нулю. Следовательно, $r(z) = r$ является числом: $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0) + r$.

Положим в этом равенстве $z = z_0$. Получаем $P_n(z_0) = 0 + r = r$, что и требовалось доказать.

Отсюда, в частности, следует, что если z_0 корень многочлена $P_n(z)$, то $P_n(z)$ делится на $(z - z_0)$ и $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0)$.

Пример 16. Найдите остаток от деления многочлена $F(z) = z^{1502} - 90z^{175} + 3$ на многочлен $z^2 + 1$.

Решение. Выполним деление с остатком:

$$z^{1502} - 90z^{175} + 3 = (z^2 + 1)Q(z) + az + b. \quad (17)$$

Числа $z = \pm i$ являются корнями многочлена $z^2 + 1$, поэтому подставим их в равенство (17).

$$z = i \rightarrow i^{1502} - 90i^{175} + 3 = ai + b,$$

$$z = -i \rightarrow (-i)^{1502} - 90(-i)^{175} + 3 = -ai + b.$$

Так как $i^{1502} = i^2 = -1$ и $i^{175} = i^3 = -i$, то, упрощая, получаем систему

$$\begin{cases} 2 + 90i = ai + b, \\ 2 - 90i = -ai + b. \end{cases}$$

Решение этой системы – это $a = 90$ и $b = 2$, значит, остаток равен $r(z) = 90z + 2$.

Справедлива следующая теорема: *каждое алгебраическое уравнение имеет на множестве комплексных чисел по крайней мере один корень.* Эта теорема называется теоремой Гаусса или основной теоремой высшей алгебры.

С помощью теоремы Гаусса нетрудно доказать, что левая часть уравнения (16) всегда допускает представление в виде произведения

$$a_n(z - z_1)^{\alpha_1}(z - z_2)^{\alpha_2} \dots (z - z_k)^{\alpha_k}, \quad (18)$$

где z_1, z_2, \dots, z_k – некоторые различные комплексные числа, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – натуральные числа, причём $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n$ (доказательство может быть произведено индукцией по n).

Отсюда следует, что числа z_1, z_2, \dots, z_k и только они являются корнями уравнения (16). При этом говорят, что z_1 является корнем кратности α_1, z_2 – корнем кратности α_2 и т. д.

Если условиться считать корень уравнения столько раз, какова его кратность, то можно сформулировать теорему: *каждое алгебраическое уравнение степени n имеет на множестве комплексных чисел ровно n корней.*

Отметим также следующее утверждение. *Если число z_0 является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то \bar{z}_0 тоже является корнем этого многочлена.* Покажем это.

Если z_0 – корень многочлена $P_n(z)$, то $P_n(z_0) = 0$. Тогда

$$\overline{P_n(z_0)} = \bar{0} = 0, \text{ то есть } \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} = 0.$$

Пользуясь равенствами (5а)–(5д), получаем, что

$$\overline{a_n} \left(\overline{z_0}\right)^n + \overline{a_{n-1}} \cdot \left(\overline{z_0}\right)^{n-1} + \dots + \overline{a_1} z_0 + \overline{a_0} = 0.$$

Поскольку числа a_0, a_1, \dots, a_n действительные, то

$$\overline{a_n} = a_n, \overline{a_{n-1}} = a_{n-1}, \dots, \overline{a_0} = a_0.$$

Тогда, $a_n \left(\overline{z_0}\right)^n + a_{n-1} \left(\overline{z_0}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \overline{z_0} + a_0 = 0$, что и означает, что число $\overline{z_0}$ есть корень многочлена P_n .

Можно показать, что если для многочлена с действительными коэффициентами z_0 – корень кратности k , то и $\overline{z_0}$ – корень кратности k .

Разложение (18) для многочленов с действительными коэффициентами примет вид:

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)^{\alpha_1} (z - \overline{z_1})^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} (z - \overline{z_2})^{\alpha_2} \dots \quad (19) \\ \dots (z - z_l)^{\alpha_l} (z - \overline{z_l})^{\alpha_l} \cdot (z - z_{l+1})^{\alpha_{l+1}} (z - z_{l+2})^{\alpha_{l+2}} \dots (z - z_m)^{\alpha_m},$$

причём $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l) + \alpha_{l+1} + \alpha_{l+2} + \dots + \alpha_m = n$.

Здесь z_1, z_2, \dots, z_l – комплексные числа; $z_{l+1}, z_{l+2}, \dots, z_m$ – действительные числа.

Заметим, что $(z - z_i) \cdot (z - \overline{z_i}) = z^2 - (z_i + \overline{z_i})z + z_i \overline{z_i}$ есть квадратный трёхчлен с действительными коэффициентами, не имеющий действительных корней.

Мы получили следующее утверждение: *любой многочлен с действительными коэффициентами можно разложить в произведение многочленов первой и второй степеней с действительными коэффициентами.*

Пример 17. Решите уравнение: а) $z^3 = -2\overline{z}$; б) $|z| + iz = 3 - 5i$.

Решение. а) Представим число z в тригонометрической форме:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Вспомним, что $|\overline{z}| = |z|$, а в качестве одного из аргументов числа \overline{z} можно выбрать $(-\varphi)$; кроме того $-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$. Тогда уравнение принимает вид:

$$\rho^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = 2\rho (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) (\cos(\pi) + i \sin(\pi)). \quad (20)$$

Возможны два случая:

1) $\rho = 0$, тогда $z = 0$, и это решение уравнения.

2) $\rho \neq 0$. Тогда равенство (20) означает, что у чисел в левой и правой части равны модули, а аргументы отличаются на $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, т. е.

$$\begin{cases} \rho^3 = 2\rho, \\ 3\varphi = -\varphi + \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} \rho = \sqrt{2}, \\ \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (21)$$

Несложно понять, что мы получим всевозможные решения, если подставим в (21) значения $k = 0, 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} \text{Итак,} \quad z &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1 + i \text{ (при } k = 0); \\ z &= \sqrt{2} \cos \left(\frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -1 + i \text{ (при } k = 1); \\ z &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -1 - i \text{ (при } k = 2); \\ z &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 1 - i \text{ (при } k = 3). \end{aligned}$$

Ответ: $0; 1 + i; -1 + i; -1 - i; 1 - i$.

б) Пусть $z = x + iy$. Тогда уравнение имеет вид $\sqrt{x^2 + y^2} + ix - y = 3 - 5i$. Приравняем действительные и мнимые части:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - y = 3, \\ x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ \sqrt{25 + y^2} = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ 25 + y^2 = y^2 + 6y + 9, \\ y + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ y = \frac{8}{3}, \end{cases}$$

т. е. $z = -5 + \frac{8}{3}i$. **Ответ:** $-5 + \frac{8}{3}i$.

Выше сформулированные теоремы полностью решают вопрос о существовании корней у произвольного алгебраического уравнения, но не дают метода отыскания этих корней. Если корень уравнения первой степени $a_1 z + a_0 = 0$ определяется формулой $z = -\frac{a_0}{a_1}$, корни уравнения второй степени $a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ всегда могут быть получены с помощью формулы (14), то в случае более высоких степеней дело обстоит иначе: для уравнений третьей и четвертой степеней аналогичные формулы настолько громоздки, что ими предпочитают не пользоваться, а для уравнений степени *выше четвертой* подобных формул в общем случае просто не существует.

Отсутствие общего метода решения алгебраических уравнений не мешает, однако, в частных случаях отыскать все корни заданного уравнения. Для решения уравнений с целыми коэффициентами (именно такие уравнения обычно встречаются в школьном курсе математики) может быть полезна следующая теорема: *целые ненулевые корни любого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.*

В самом деле, пусть $z = k$ – целый корень уравнения

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0,$$

где a_0, a_1, \dots, a_n – целые числа. Тогда $a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0 = 0$.

Отсюда получаем, что $a_0 = -k(a_n k^{n-1} + a_{n-1} k^{n-2} + \dots + a_1)$, то есть k – делитель числа a_0 (число $a_n k^{n-1} + a_{n-1} k^{n-2} + \dots + a_1$ при сделанных предположениях является целым).

Пример 18. Решите уравнение $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = 0$.

Решение. Рассматривая делители свободного члена $\pm 1, \pm 5$, убеждаемся в том, что только $z = 5$ является целым корнем уравнения. Де-

$$\begin{array}{r} \text{Делим левую часть уравнения на } z - 5: \quad - \frac{z^3 - 4z^2 - 4z - 5}{z^3 - 5z^2} \left| \frac{z - 5}{z^2 + z + 1} \right. \\ \hline \quad - z^2 - 4z \\ \quad \quad z^2 - 5z \\ \quad \quad \quad - z - 5 \\ \quad \quad \quad \quad z - 5 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Таким образом, $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = (z - 5)(z^2 + z + 1)$.

Решая квадратное уравнение $z^2 + z + 1 = 0$ (см. пример 14), получаем остальные корни. Итак, $z_1 = 5$, $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

В заключение рассмотрим ещё два примера на вычисление комплексных корней многочленов и на применение формулы (19).

Пример 19. Составьте многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1, имеющий корни $z_1 = z_2 = 2$, $z_3 = 1 + i$.

Решение. Поскольку многочлен $P(z)$ имеет действительные коэффициенты и комплексный корень z_3 , то число $z_4 = \overline{z_3} = 1 - i$ так же является его корнем. Тогда наименьшая степень многочлена равна 4 и по формуле (19)

$$\begin{aligned} P_4(z) &= 1(z - z_1)^2(z - z_3)(z - \overline{z_3}) = (z - 2)^2(z - (1 + i))(z - (1 - i)) = \\ &= (z^2 - 4z + 4)(z^2 - 2z + 2) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 16z + 8. \end{aligned}$$

Пример 20. Найдите все корни уравнения $z^6 - 2\sqrt{3}z^3 + 4 = 0$ и разложить левую часть уравнения в произведение многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами.

Решение. Пусть $u = z^3$, тогда u есть решение квадратного уравнения $u^2 - 2\sqrt{3}u + 4 = 0$. Его корни $u_{1,2} = \sqrt{3} \pm i$. Для нахождения z надо решить 2 уравнения в комплексных числах: $z^3 = u_{1,2}$. Каждое из них имеет 3 корня. Находим эти корни по формуле (12):

$$z^3 = \sqrt{3} + i \Leftrightarrow z^3 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right); \text{ откуда } \varphi_1 = \arg u_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\varphi_2 = \arg u_2 = \arg(\sqrt{3} - i) = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение $z^3 = \sqrt{3} + i$ имеет 3 комплексных корня

$$z_k = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} \right) \right), k = 0; 1; 2.$$

$$z^3 = \sqrt{3} - i \Leftrightarrow z^3 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_n = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} \right) \right), n = 0; 1; 2.$$

Значит данное уравнение имеет следующие 6 корней:

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{18} + i \sin \frac{\pi}{18} \right), \quad z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{13\pi}{18} + i \sin \frac{13\pi}{18} \right),$$

$$z_3 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{25\pi}{18} + i \sin \frac{25\pi}{18} \right), \quad z_4 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{18} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{18} \right) \right),$$

$$z_5 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{18} + i \sin \frac{11\pi}{18} \right), \quad z_6 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{23\pi}{18} + i \sin \frac{23\pi}{18} \right).$$

Далее наше уравнение не имеет действительных корней, значит в его разложении (19) в произведение будут только многочлены второй степени с действительными коэффициентами вида $(z - z_k)(z - \bar{z}_k)$. Среди корней z_1, \dots, z_6 комплексно сопряжёнными являются: z_1 и z_4 ($\arg z_1 = -\arg z_4$), z_2 и z_6 ($\arg z_2 + \arg z_6 = 2\pi$), z_3 и z_5 . Поскольку $z_1 + z_4 = 2\sqrt[3]{2} \cos \frac{\pi}{18}$, $z_1 \cdot z_4 = \sqrt[3]{4} \left(\cos^2 \frac{\pi}{18} + \sin^2 \frac{\pi}{18} \right) = \sqrt[3]{4}$, то по теореме

Виета $(z - z_1)(z - z_4) = z^2 - 2\sqrt[3]{2} \cos \left(\frac{\pi}{18} \right) z + \sqrt[3]{4}$. Аналогично

$$(z - z_2)(z - z_6) = z^2 - 2\sqrt[3]{2} \cos \left(\frac{13\pi}{18} \right) z + \sqrt[3]{4},$$

$$(z - z_3)(z - z_5) = z^2 - 2\sqrt[3]{2} \cos \left(\frac{25\pi}{18} \right) z + \sqrt[3]{4}.$$

Тогда $z^6 - 2\sqrt[3]{3}z^3 + 4 = \left(z^2 - 2\sqrt[3]{2} \cos \left(\frac{\pi}{18} \right) z + \sqrt[3]{4} \right) \cdot$

$$\cdot \left(z^2 - 2\sqrt[3]{2} \cos \left(\frac{13\pi}{18} \right) z + \sqrt[3]{4} \right) \left(z^2 - 2\sqrt[3]{2} \cos \left(\frac{25\pi}{18} \right) z + \sqrt[3]{4} \right).$$

Пример 21. Число $z=1$ является корнем уравнения $z^3 + az^2 + (9 - 6i)z - 5 + 5i = 0$. Найдите a и решите уравнение.

Решение. Подставляя $z=1$ в уравнение, получаем $1 + a + 9 - 6i - 5 + 5i = 0$, откуда $a = -5 + i$. Так как $z=1$ – корень, то левая часть уравнения делится на $(z-1)$. Подставляем $a = -5 + i$ и делим левую часть уравнения на $(z-1)$:

$$\begin{array}{r} z^3 + z^2(-5+i) + z(9-6i) - 5 + 5i \quad | \quad z-1 \\ \underline{z^3 - z^2} \\ z^2(-4+i) + z(9-6i) \\ \underline{z^2(-4+i) + z(4-i)} \\ (5-5i)z - 5 + 5i \\ \underline{(5-5i)z - 5 + 5i} \\ 0 \end{array}$$

Значит, $z^3 + z^2(-5+i) + z(9-6i) - 5 + 5i = (z-1)(z^2 + (-4+i)z + 5-5i)$.

Далее решаем квадратное уравнение $z^2 + (-4+i)z + 5-5i = 0$.

$D = (-4+i)^2 - 4(5-5i) = 15 - 8i - 20 + 20i = -5 + 12i$. Для вычисления значений $\sqrt{D} = \sqrt{-5+12i}$ в алгебраической форме используем формулы (15а), (15б). Для $x = \operatorname{Re}(\sqrt{D})$, $y = \operatorname{Im}(\sqrt{D})$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \text{ решая которую, находим } x_1 = 2, y_1 = 3 \text{ и } x_2 = -2, y_2 = -3.$$

Значит, $\sqrt{D} = \pm(2+3i)$ и $z_1 = \frac{4-i+(2+3i)}{2} = 3+i$,

$$z_2 = \frac{4-i-(2+3i)}{2} = 1-2i.$$

Ответ. $a = -5+i$. Корни уравнения: $z_1 = 3+i$, $z_2 = 1-2i$, $z_3 = 1$.

Контрольные вопросы

1(4). Выполните вычисления (ответ запишите в алгебраической форме):

а) $(2i+5) - 6(3i-2)$; **б)** $(4+i)(2i-1)$; **в)** $i^7 + i^6 + i^5 + i^4$; **г)** $\frac{8+i}{4-6i}$.

2(4). Запишите следующие комплексные числа в тригонометрической форме: **а)** $z = 5$; **б)** $z = -4$; **в)** $z = 3i$; **г)** $z = 6 - 2i\sqrt{3}$.

3(5). Известно, что $\varphi = \arg z$, $\rho = |z|$. Найдите модуль и один из аргументов для каждого из следующих комплексных чисел:

а) $-z$; **б)** \bar{z} ; **в)** $\frac{4i}{z^3}$; **г)** $z + \bar{z}$.

4(4). Изобразите множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $|z-i| = 5$; **б)** $|z-5| = i$; **в)** $|3+i-z| = |z+5i+1|$; **г)** $\cos(\arg z) = \frac{1}{2}$.

5(6). Вычислите, используя тригонометрическую форму комплексного числа: Ответ запишите в алгебраической форме.

а) $\frac{(i - \sqrt{3})^{2016}}{4^{1008}}$; **б)** $\sqrt[6]{-64}$; **в)** $\sqrt[4]{8i\sqrt{3}-8}$.

6(4). Решите квадратные уравнения:

а) $2z^2 - 7z + 7 = 0$; **б)** $2iz^2 + (2 + 5i)z + (13 + i) = 0$.

7(3). Делится ли многочлен $z^5 + 3iz^4 - 2z^3 - 2z^2 - 6iz + 4$ на многочлен **а)** $z + 2i$; **б)** $z - i$? Если нет, то найдите остаток от деления.

8(4). Определите кратности корней $z_1 = -2i$ и $z_2 = i$ для многочлена $z^6 - 2iz^5 + 4z^4 - 10iz^3 - z^2 - 8iz - 4$.

Задачи

1(5). Представьте число z в тригонометрической форме, если

а) $z = \sin \frac{13\pi}{5} + i \cos \frac{2\pi}{5}$; **б)** $z = 1 + \sin 4\alpha + i \cos 4\alpha$, $\frac{\pi}{8} < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

2(12). Решите уравнения: **а)** $(\bar{z})^2 = 3z^3$; **б)** $z^2 - z|z| + |z|^2 = 0$;

в) $(iz - 1)^4 = (z + 3)^4$; **г)** $4\bar{z}^2 - 4z|z| + 3 = 0$.

3(6). Изобразите на комплексной плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют следующим условиям:

а) $\frac{z + 4i}{1 - 3i} = \frac{\bar{z} - 4i}{1 + 3i}$; **б)** $\frac{\pi}{6} \leq \arg(6iz - 12i - 18) \leq \frac{2\pi}{3}$; **в)** $\left| \frac{z - i}{z + 2} \right| = 3$.

4(3). Найдите $z^n + \frac{1}{z^n}$, если $z + \frac{1}{z} = -1$, $n \in \mathbb{N}$.

5(4). Среди чисел z , принадлежащих множеству D , найдите число с наименьшим модулем, если множество D задано следующим неравенством **а)** $|z + 5i| \leq |z - 1 + i|$; **б)** $|z + 3i - 4| \geq 7$.

6(2). Решите уравнение $z^4 + z^3 - 4z^2 + 8z - 8 = 0$, если известно, что число $z_1 = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}$ является его корнем.

7*(5). Вычислите сумму

$$S = \cos \varphi + a \cos 2\varphi + a^2 \cos 3\varphi + \dots + a^{n-1} \cos n\varphi.$$

8(4). Сумма квадратов корней уравнения $z^3 - 6z^2 + \alpha z + 40 = 0$ равна 28. Найдите α и решите это уравнение.

9(2). Составьте многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, корнями которого являются числа $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 3 - i$ и $z_3 = -2$.

10(4) Представьте следующие многочлены в виде произведения многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами:

а) $P(z) = 324z^4 + 1$; **б)** $Q(z) = 2z^4 + 7z^3 - 27z^2 + 16z - 12$.

11(4). Пусть D_1 – множество точек z_1 комплексной плоскости таких, что: $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z - 8| \leq 2$; D_2 – множество точек z_2 комплексной плоскости таких, что $z_2 = \frac{3}{2}iz_1$.

а) Изобразите на комплексной плоскости множества D_1 и D_2 .

б) Найдите расстояние между множествами D_1 и D_2 (т. е. наименьшее расстояние между точками z_1 и z_2 , такими, что $z_1 \in D_1$, $z_2 \in D_2$).

12(4). Найдите остаток от деления многочлена $3z^{2017} - 2z^{503} + 4z^{302} + 8$ на многочлен $z^2 - z + 1$.